

4.Vorlesung

Aerodynamik I

(Profiltheorie)

Prof. Dr.-Ing. C. Tropea

Dipl.-Ing. S. Eder / Dipl.-Ing. M. Weismüller

VWS (3+0)

Wintersemester

4.Vorlesung Aerodynamik I

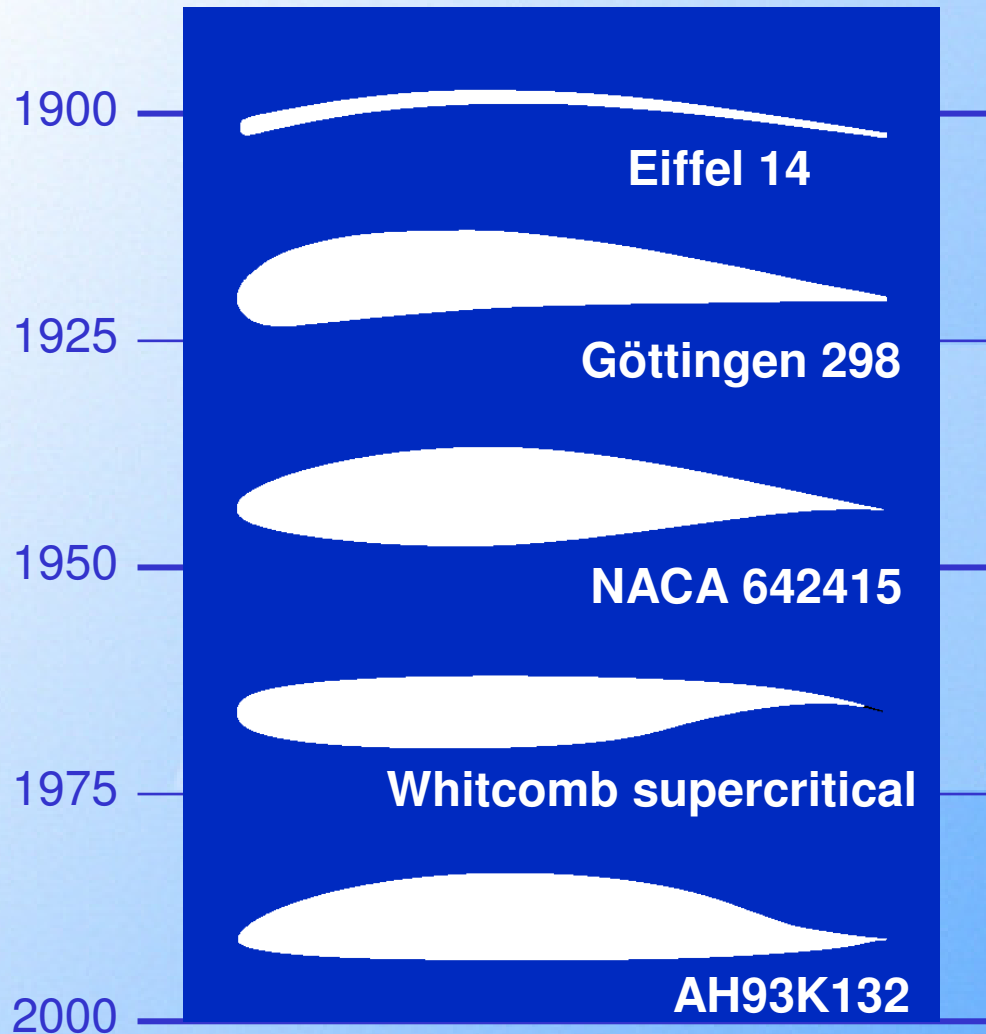


Profiltheorie :

- Profilgeometrie
- Profilbezeichnungen
- Profiltypen
- Kräfte und Momente an Profilen
- Aerodynamische Koeffizienten
- Kutta-Bedingung
- Entstehung der Zirkulation um ein Profil
- Verdrängungsproblem
- Auftriebsproblem (Skeletttheorie)
- Panelverfahren



Historische Entwicklung



Dünne, gewölbte Profile
(Lilienthal, Gebrüder Wright,
bis 1. Weltkrieg)

Dicke Profile (Ende 1. Welt-
krieg, zuerst *Fokker Dr-1*)

Laminarprofile (NACA-
Serie)

Superkritische Profile

Laminarprofile mit fast
100% laminarer Unterseite

Profilgeometrie

- Profiltiefe (Chord)
- Sehne (Chord line)
- Skelettlinie (Mean camber line)
- Profildicke (Maximum thickness)
- Dickenrücklage (x-location of maximum thickness)
- Max. Wölbungshöhe (Maximum camber)
- Wölbungsrücklage (x-location of maximum camber)
- Nasenradius (leading edge radius)



Profilcharakteristik

Beispiele für gegensätzliche Anforderungen an Profile

Geringe Profildicke zur Verminderung des Profilwiderstands	Dicke	Möglichst große Dicke zur Erhöhung des Treibstoffvolumens sowie der Bauhöhe für den Flügelholm
Hohe Wölbung für großen maximalen Auftriebsbeiwert	Wölbung	Niedrige Wölbung zur Verminderung des Profilwiderstands bei hohen Geschwindigkeiten
Geringer Radius (Unterschall) bzw. spitze Vorderkante (Überschall) für geringen Widerstand	Nasenradius	Vergrößerung des Anstellwinkelbereichs (und Maximalauftriebs) mit zunehmenden Nasenradius



Profilbezeichnungen (NACA - Serie)

- vierstellige Reihe
- fünfstellige Reihe
- sechsstellige Reihe



Vierstellige Reihe

NACA abcc

a : Maximale Wölbungshöhe zur Profiltiefe mal hundert

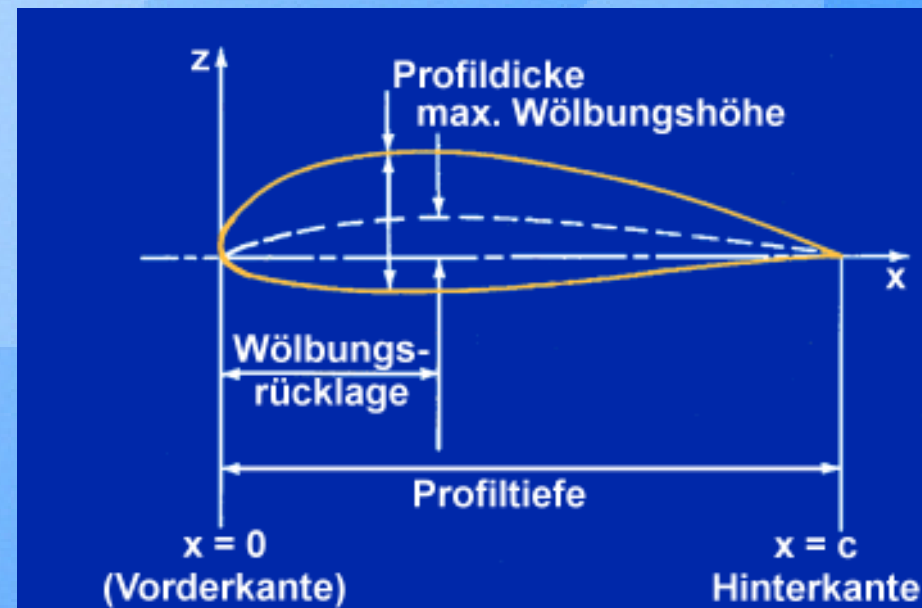
b : Ort der maximalen Wölbungshöhe zur Profiltiefe mal zehn

cc : Maximale Dicke zur Profiltiefe mal hundert

Beispiel :

NACA 2416

Profil mit einer max. Wölbung von 2% der Profiltiefe in 40% der Profiltiefe und einer max. Dicke von 16% der Profiltiefe



Profilcharakteristik

Fünfstellige Reihe

NACA abbcc

a : $0,15 \times a$ ist der Entwurfsauftriebsbeiwert

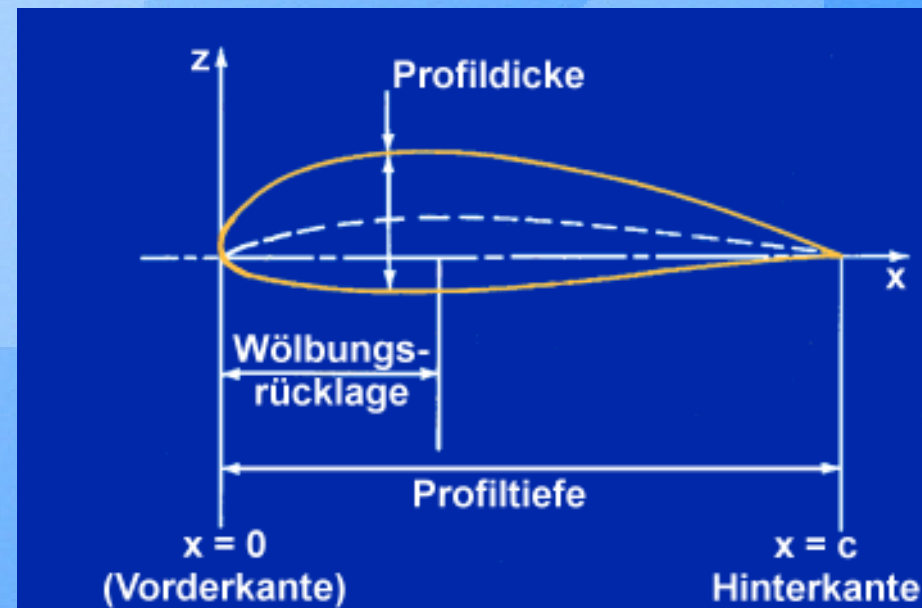
bb : Wölbungsrücklage zur Profiltiefe mal hundert

cc : Maximale Dicke zur Profiltiefe mal hundert

Beispiel :

NACA 23012

Profil mit einem theoretischen Entwurfsauftriebsbeiwert von 0,3, einer Wölbungsrücklage von 15% der Profiltiefe und einer maximalen Dicke von 12% der Profiltiefe



Profilcharakteristik

Sechsstellige Reihe

NACA ab,c-dee

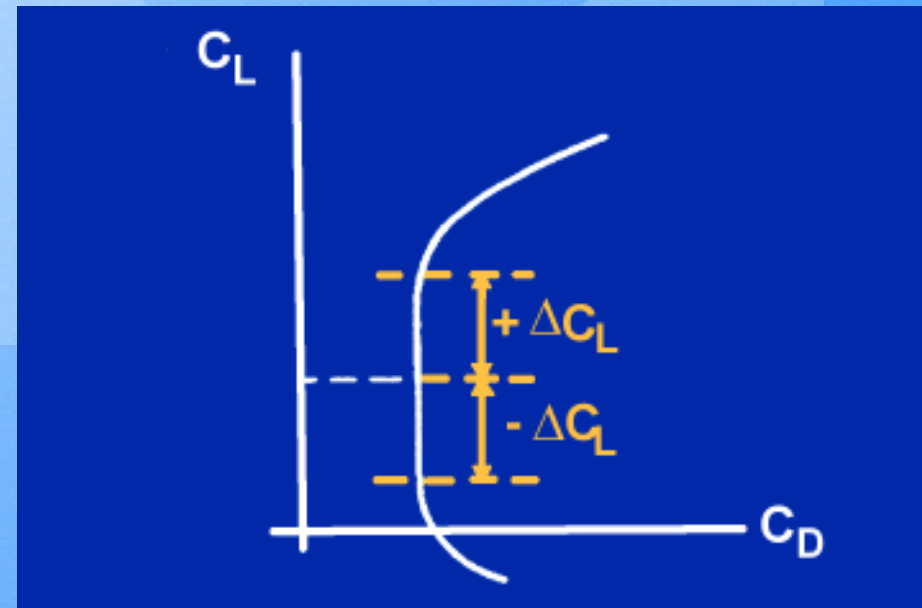
a : Nummer der Serie (hier : 6)

b : Ort des Druckminimums zur Profiltiefe mal hundert

c : Breite der Laminardelle

d : $0,1 \times c$ ist der Entwurfsauftriebsbeiwert

ee : Maximale Dicke zur Profiltiefe mal hundert



Laminardelle

Profiltypen

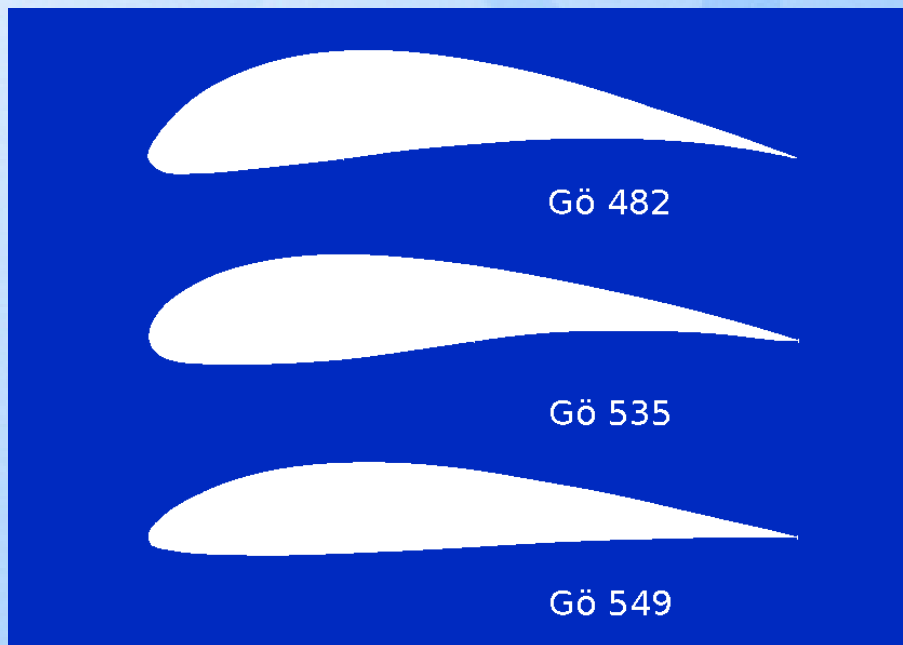
Profile stellen einen Kompromiss zwischen unterschiedlichen Anforderungen dar und werden für ihren Einsatzzweck optimiert. Sie lassen sich in verschiedene Kategorien einteilen:

- Tropfenprofile
- Laminarprofile
- Hochauftriebsprofile (Mehrelementprofile)
- Transsonikprofile
- Überschallprofile

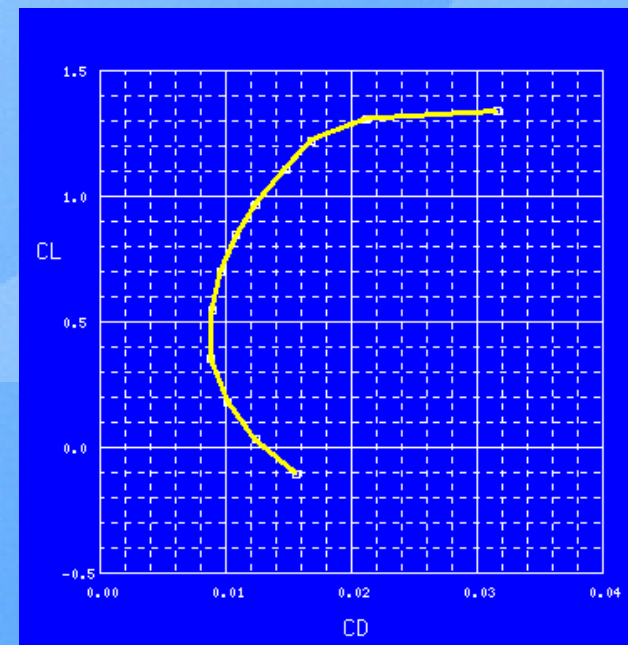


Tropfenprofile

- Geringe Dickenrücklage → Tropfenform
- Nur geringer Anteil der Grenzschicht ist laminar → hoher Widerstand
- Große Dicke und großer Nasenradius → hoher maximaler Auftrieb



Tropfenprofile Göttingen



Typische C_L/C_D -Polare

Laminarprofile (Natural Laminar Flow Airfoils)

- Stabilisierung der laminaren Grenzschicht durch Formgebung des Profils (= Druckverteilung)
- Verlängerte laminare Laufstrecke → geringerer Widerstand

HINWEIS :

DU = Delft University

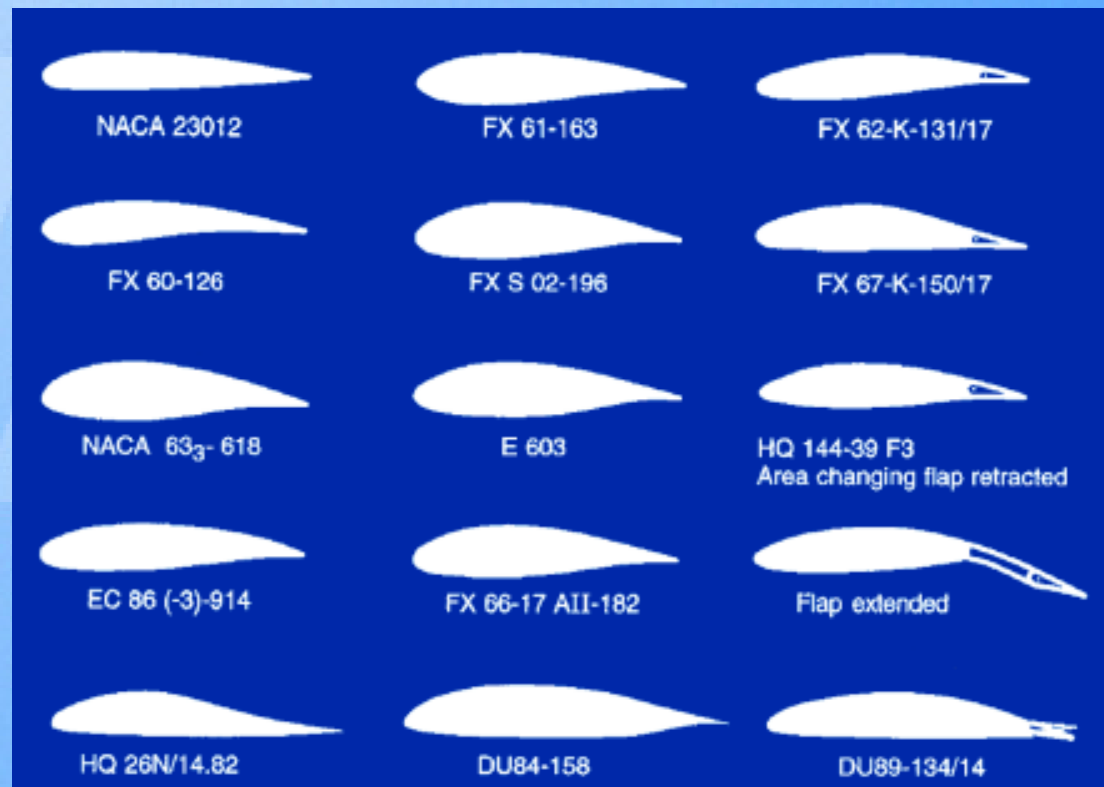
E/EC = Eppler

FX = Wortmann

Gö = Göttingen

HQ = Horstmann Quast

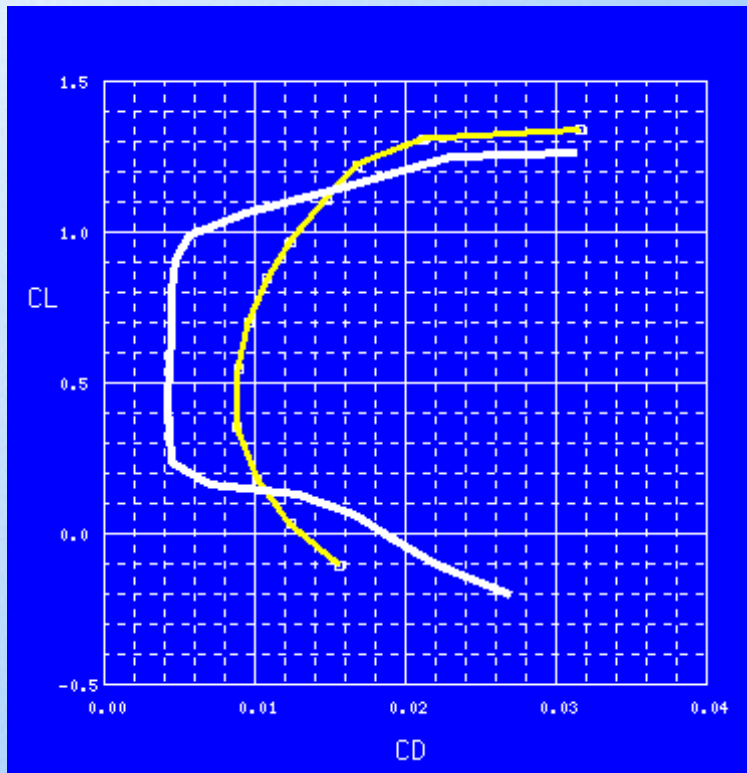
NACA = National Advisory
Committee for
Aeronautics



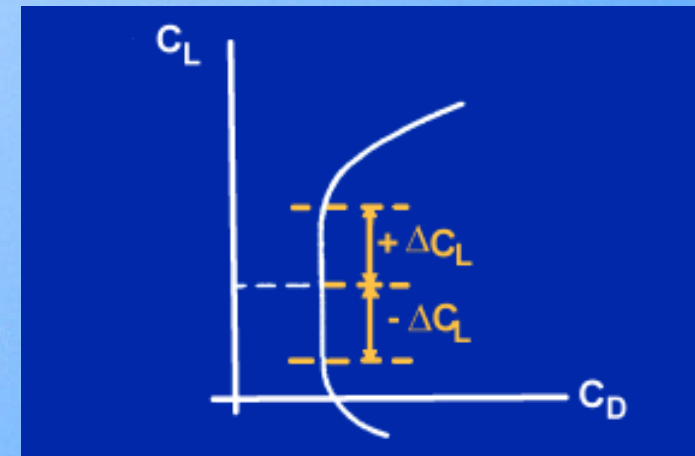
Laminarprofile

Laminarprofile (Natural Laminar Flow Airfoils)

- Geringer Widerstand der laminaren Grenzschicht über großen Anstellwinkelbereich → Laminardelle



Typische Polarenverläufe für Laminar- und Tropfenprofil (gelb)



Laminardelle

- Hohe Anforderungen an die Oberflächengüte (Rauhigkeit, Welligkeit)
- Anwendung: Segelflugzeuge, Motorflugzeuge, kleine Jets (VLJ)


Hochauftriebsprofile

- Ermöglichen niedrige Anfluggeschwindigkeiten trotz hoher Flächenbelastung



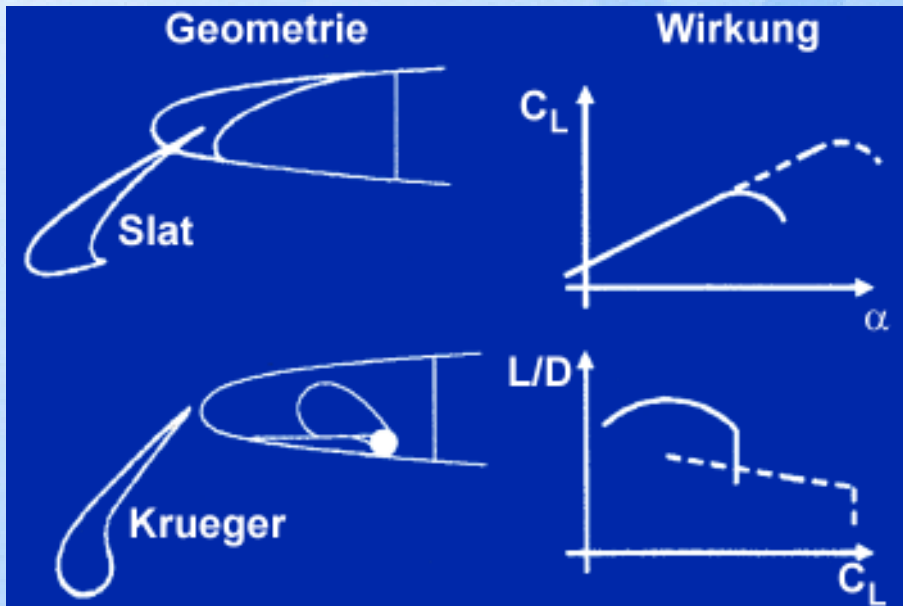
A340 nach dem Start



 *Swiss Air bei der Landung*

Hochauftriebsprofile

- Ermöglichen niedrige Anfluggeschwindigkeiten trotz hoher Flächenbelastung
- Profile werden durch Klappensysteme modifiziert :
 - Klappen an der Vorderkante



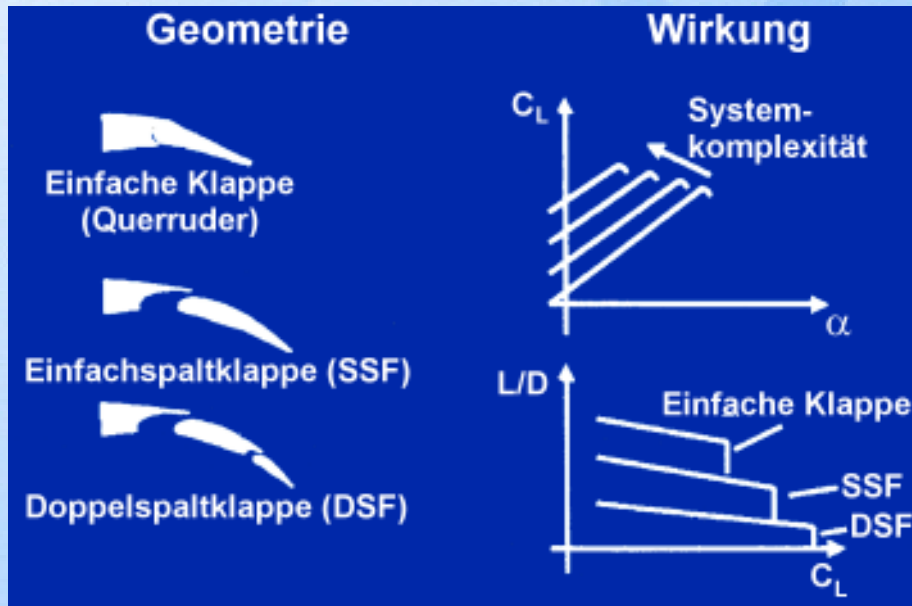
Klappen an der Vorderkante



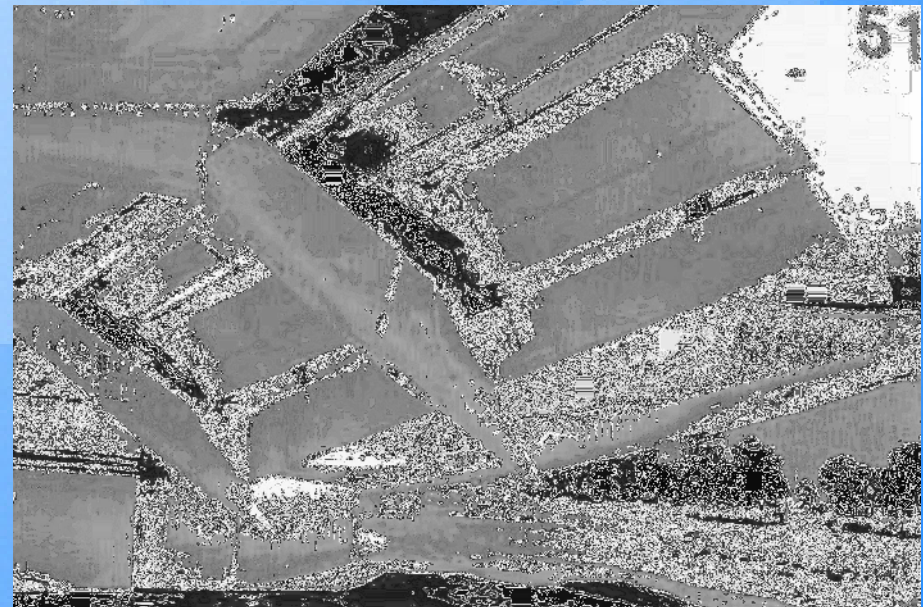
Klappen an der Vorderkante

Hochauftriebsprofile

- Ermöglichen niedrige Anfluggeschwindigkeiten trotz hoher Flächenbelastung
- Profile werden durch Klappensysteme modifiziert :
 - Klappen an der Vorderkante
 - Klappen an der Hinterkante



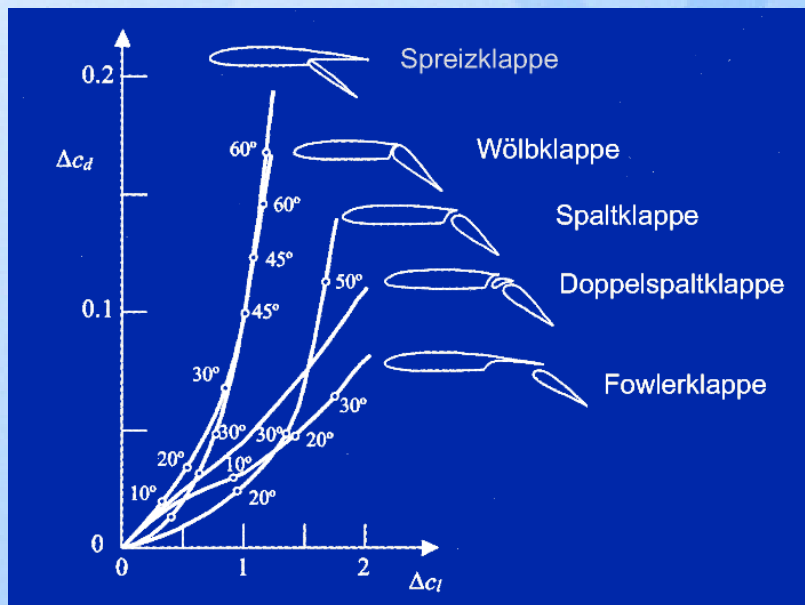
Klappen an der Hinterkante



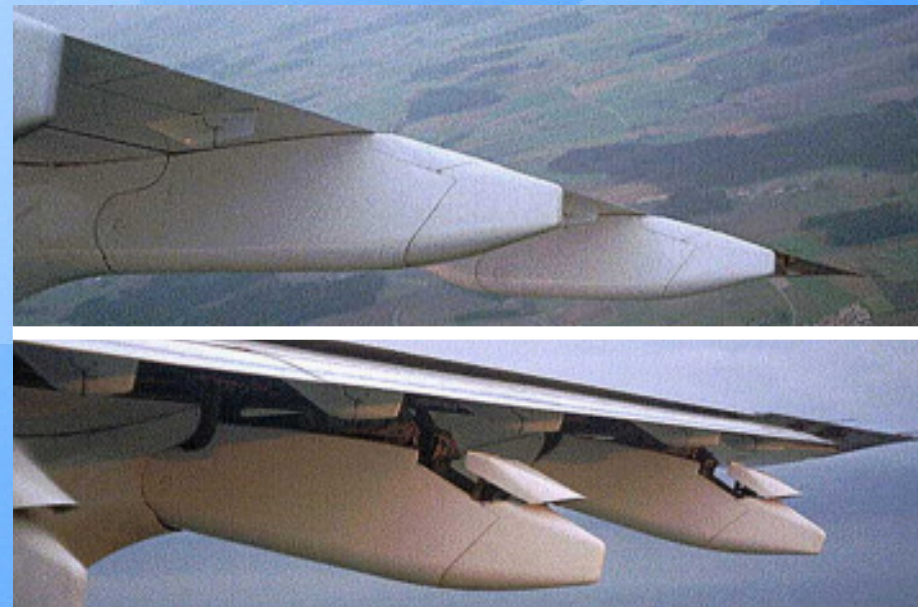
Klappen an der Hinterkante der Boeing 737

Hochauftriebsprofile

- Ermöglichen niedrige Anfluggeschwindigkeiten trotz hoher Flächenbelastung
- Profile werden durch Klappensysteme modifiziert :
 - Klappen an der Vorderkante
 - Klappen an der Hinterkante



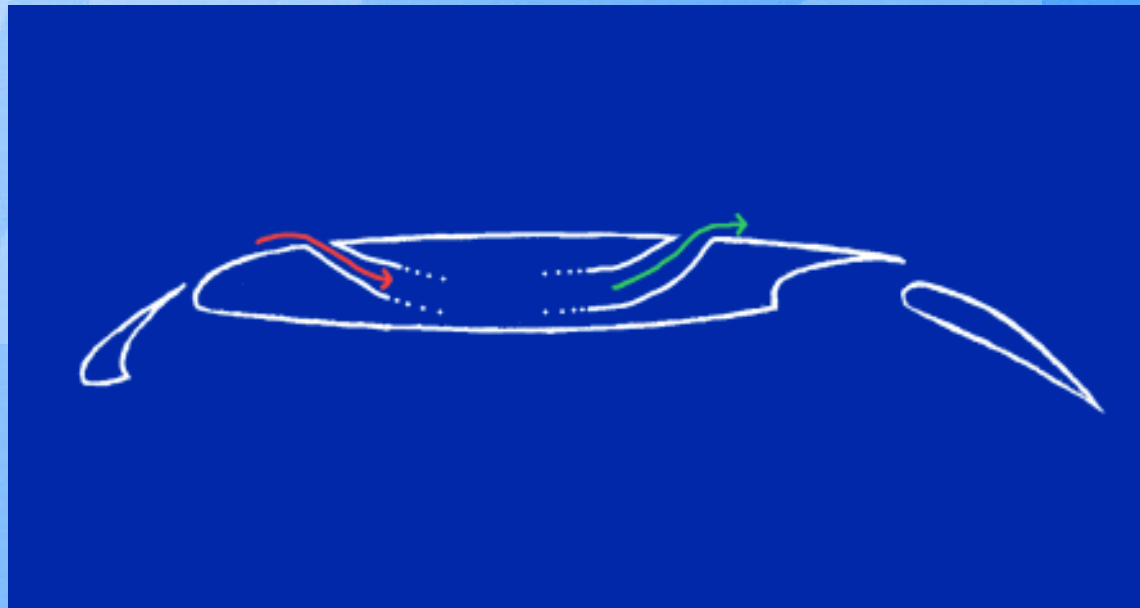
Auftriebs- und Widerstandserhöhung verschiedener Hinterkantenklappen



Klappen an der Hinterkante bei verschiedenen Stellungen

Hochauftriebsprofile

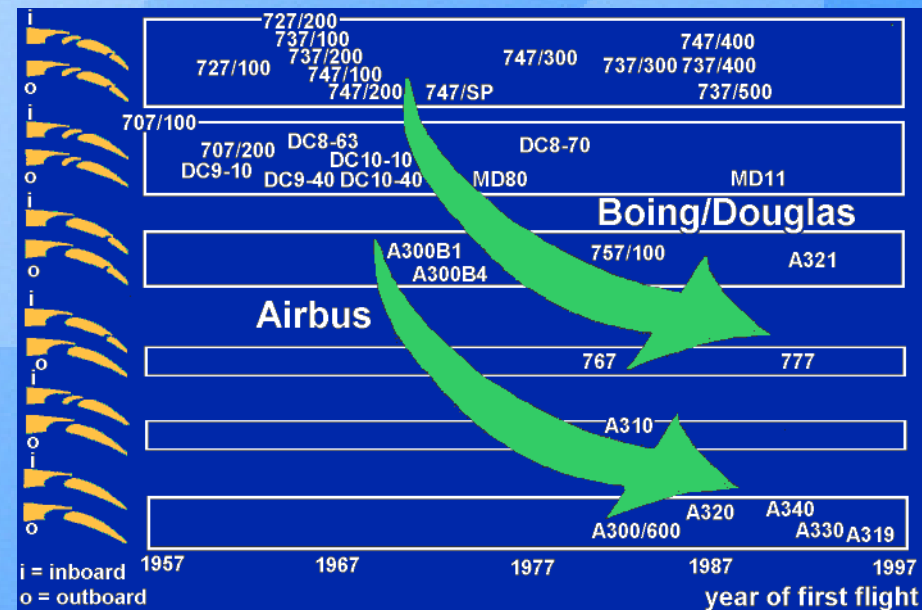
- Ermöglichen niedrige Anfluggeschwindigkeiten trotz hoher Flächenbelastung
- Profile werden durch Klappensysteme modifiziert :
 - Klappen an der Vorderkante
 - Klappen an der Hinterkante
- **Absaugen** der Grenzschicht oder **Einblasen**



Absaugen der Grenzschicht und Einblasen

Hochauftriebsprofile

- Ermöglichen niedrige Anfluggeschwindigkeiten trotz hoher Flächenbelastung
- Profile werden durch Klappensysteme modifiziert :
 - Klappen an der Vorderkante
 - Klappen an der Hinterkante
- Absaugen der Grenzschicht oder Einblasen
- Tendenz : Leistungsfähige Hochauftriebsprofile mit möglichst geringer Komplexität



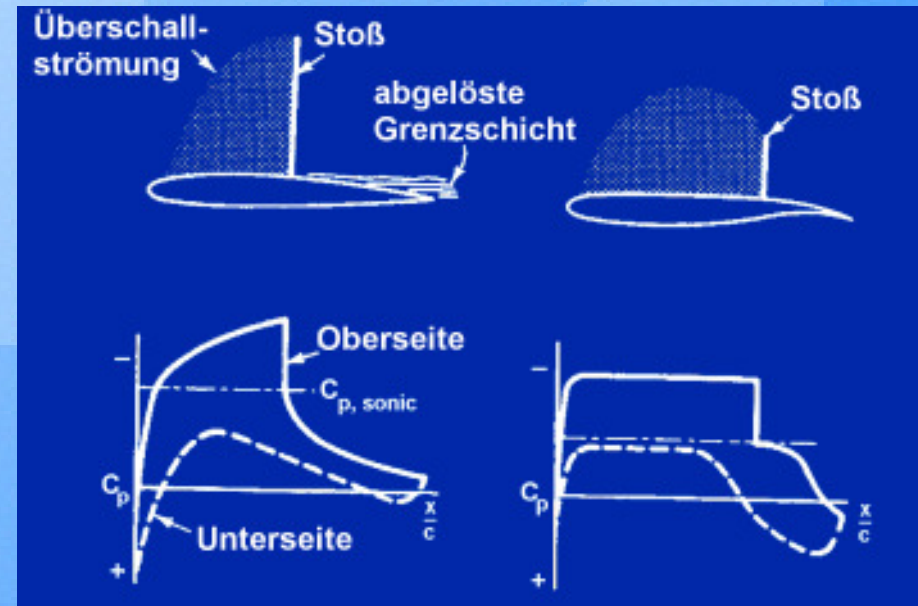
Tendenzen der Klappenentwicklung

Transsonikprofile

- Bei hohen Unterschallmachzahlen treten an Profilen lokal Überschallgebiete auf
 - Verminderung des Widerstandes durch Vermeiden oder Verändern der Überschallgebiete
- roof-top-Verteilung : konst. hoher Unterdruck auf der Oberseite und ziemlich linearer Druckanstieg bis zur Hinterkante



Überschallgebiet an einer F-18



Zwei verschiedene Profile und ihre c_p -Verteilung bei $Ma = 0,78$

Überschallprofile

- Andere Auslegungskriterien, da im Überschall andere Strömungsbedingungen gelten
- Profile müssen auch im Unterschall und Langsamflug einsetzbar sein
- Geringe Profildicke und spitze Vorderkante



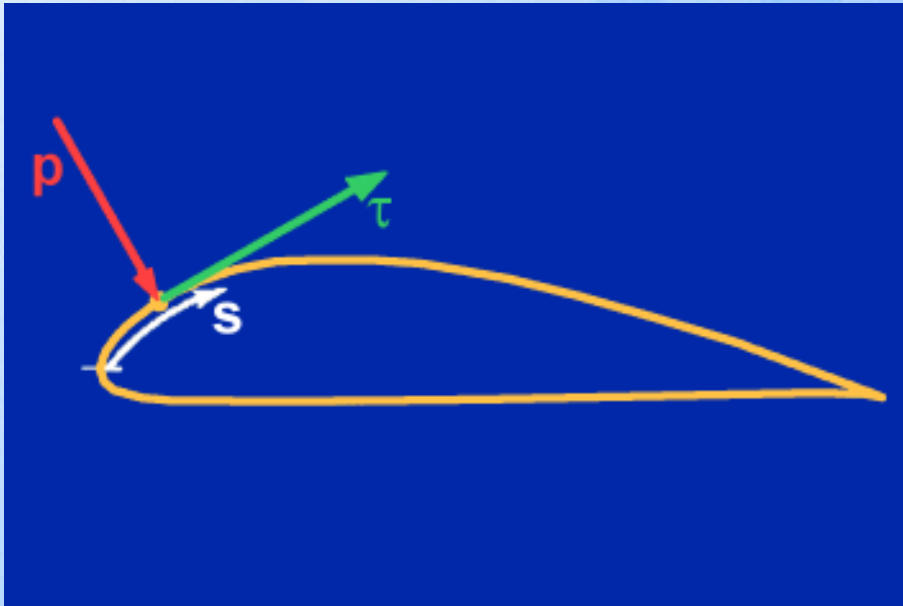
Spitze Flügelvorderkante



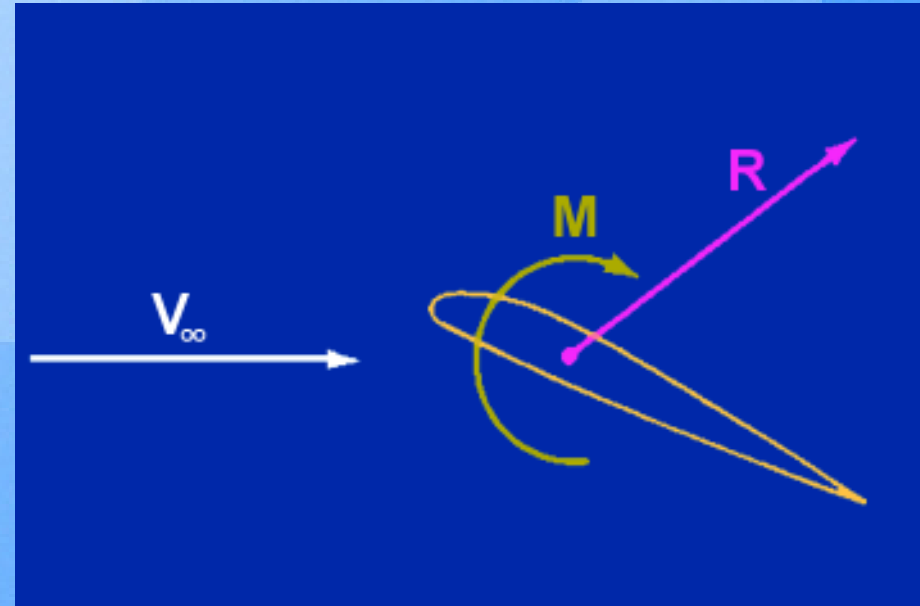
Spitze Flügelvorderkante

Kräfte und Momente an Profilen

- Ursachen aller aerodynamischen Kräfte und Momente :
 - Druckverteilung über einer Körperoberfläche
 - Schubspannungsverteilung über einer Körperoberfläche
- Aus der Druck- und der Schubspannungsverteilung folgt :
 - Resultierende aerodynamische Kraft
 - Resultierendes aerodynamische Moment.



Druck- und Schubspannungsverteilung auf einer Flügeloberfläche



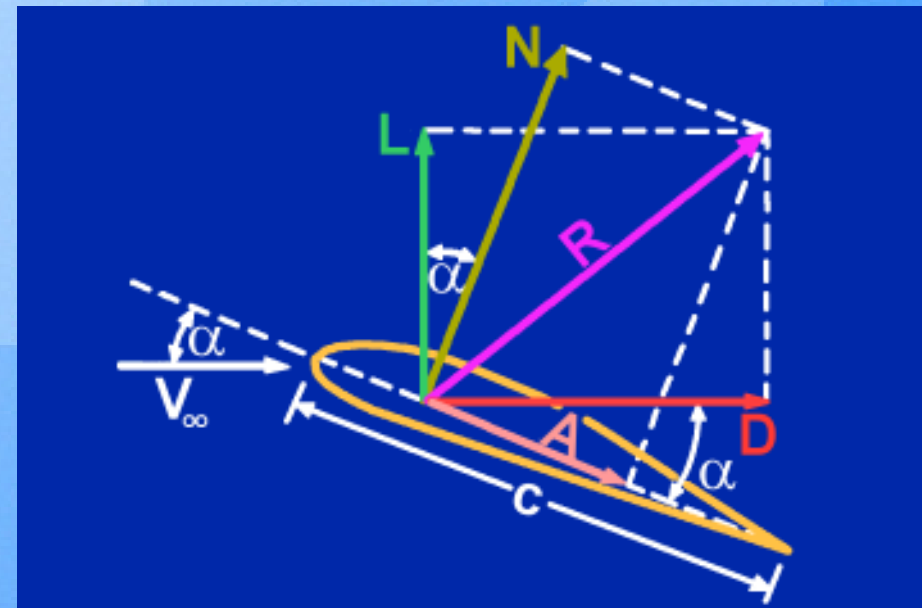
Resultierende aerodynamische Kraft und resultierendes aerodynamisches Moment

Die **Kraft R** wird in zwei Komponenten aufgeteilt :

- **L** \equiv **Lift (Auftrieb)** \equiv Komponente von **R** senkrecht zur Anströmung
- **D** \equiv **Drag (Widerstand)** \equiv Komponente von **R** parallel zur Anströmung

Oder die **Kraft R** wird in zwei andere Komponenten aufgeteilt :

- **N** \equiv **normal force (Normalkraft)** \equiv Komponente von **R** senkrecht zur Flügelsehne
- **A** \equiv **axial force (Axialkraft)** \equiv Komponente von **R** parallel zur Flügelsehne



Zerlegung der resultierenden Kraft R

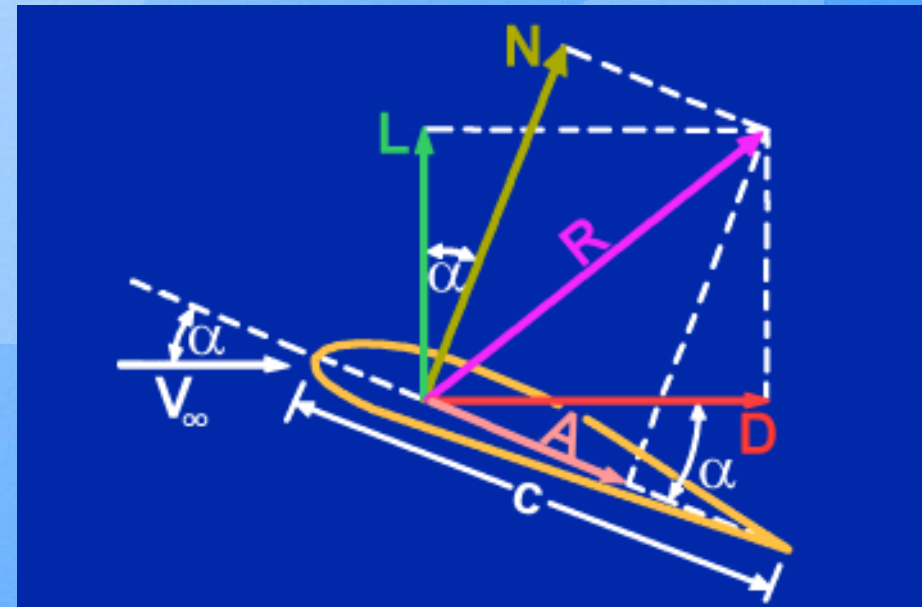
Zusammenhang der einzelnen Kraftkomponenten :

- $L = N \cos(\alpha) - A \sin(\alpha)$
- $D = N \sin(\alpha) + A \cos(\alpha)$
- $N = D \sin(\alpha) + L \cos(\alpha)$
- $A = D \cos(\alpha) - L \sin(\alpha)$

Das Verhältnis

$$\frac{L}{D} = \frac{\text{Lift}}{\text{Drag}}$$

wird Gleitzahl genannt
(Aerodynamischer Gütegrad)



Zerlegung der resultierenden Kraft R

4. Vorlesung Aerodynamik I

A diagram illustrating the aerodynamic forces acting on an airfoil. The airfoil is shown in profile, with the chord line labeled C . The free-stream velocity V_∞ is shown as a horizontal vector. The angle of attack α is the angle between the chord line and the direction of V_∞ . The resultant aerodynamic force R is shown as a pink vector originating from the leading edge. This force is decomposed into lift L (green vector, perpendicular to V_∞) and drag D (red vector, parallel to V_∞). The angle between R and L is labeled α . The angle between R and D is also labeled α . The airfoil is labeled A .



Nach der Bernoulli-Gleichung sind bei inkompressiblen Strömungen ($\rho = \rho_\infty$) Druck und Geschwindigkeit miteinander verknüpft :

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2$$

Außerdem gelten die Bezeichnungen :

$$p_0 = p_t = p_s + p_d = p_s + q = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

$p_0 = p_t$ = Totaldruck

$p_s = p$ = statischer Druck

$p_d = q$ = dynamischer Druck, Staudruck

V = Strömungsgeschwindigkeit

ρ = Dichte

HINWEIS : Die Drücke werden in der Literatur unterschiedlich bezeichnet. Das hier sind die gängigsten Formen



Durch den dynamischen Druck der ungestörten Anströmung und eine Bezugsfläche sind die Beiwerte der aerodynamischen Kräfte definiert :

$$C_L \equiv \frac{L}{q_\infty S} \quad C_D \equiv \frac{D}{q_\infty S} \quad C_N \equiv \frac{N}{q_\infty S} \quad C_A \equiv \frac{A}{q_\infty S} \quad C_M \equiv \frac{M}{q_\infty S l}$$

HINWEIS : l ist eine zusätzliche Bezugslänge für den Momentenbeiwert

Im zweidimensionalen Raum gelten die Kräfte pro Tiefeneinheit und die Bezugsfläche $S = c \cdot 1 = c$

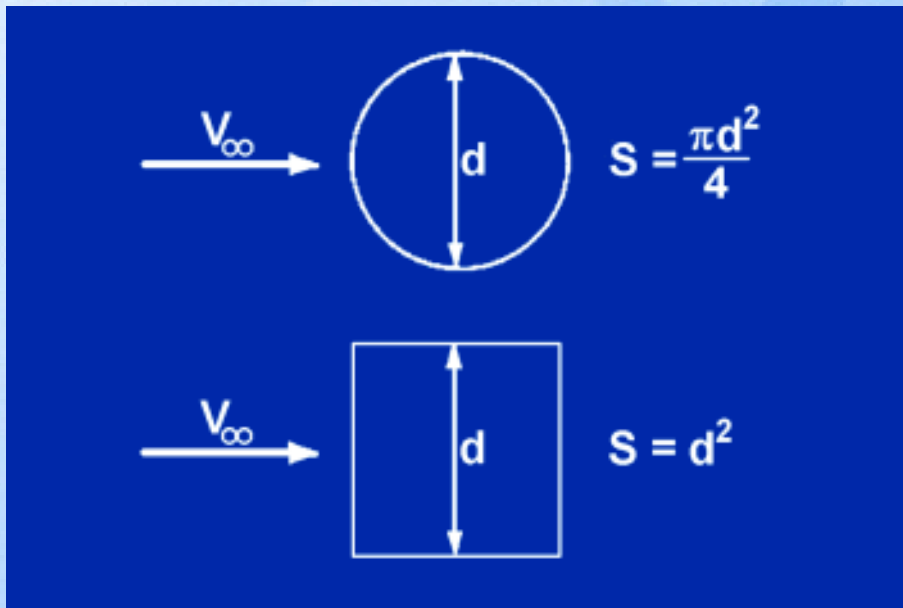
$$C_l \equiv \frac{L'}{q_\infty c} \quad C_d \equiv \frac{D'}{q_\infty c} \quad C_n \equiv \frac{N'}{q_\infty c} \quad C_a \equiv \frac{A'}{q_\infty c} \quad C_m \equiv \frac{M'}{q_\infty c l}$$

HINWEIS : Die Einheiten sind : L, D, N, A [N]; L', D', N', A' [Nm⁻¹]
 q_∞ [Nm⁻²]; S [m²]; c [m]

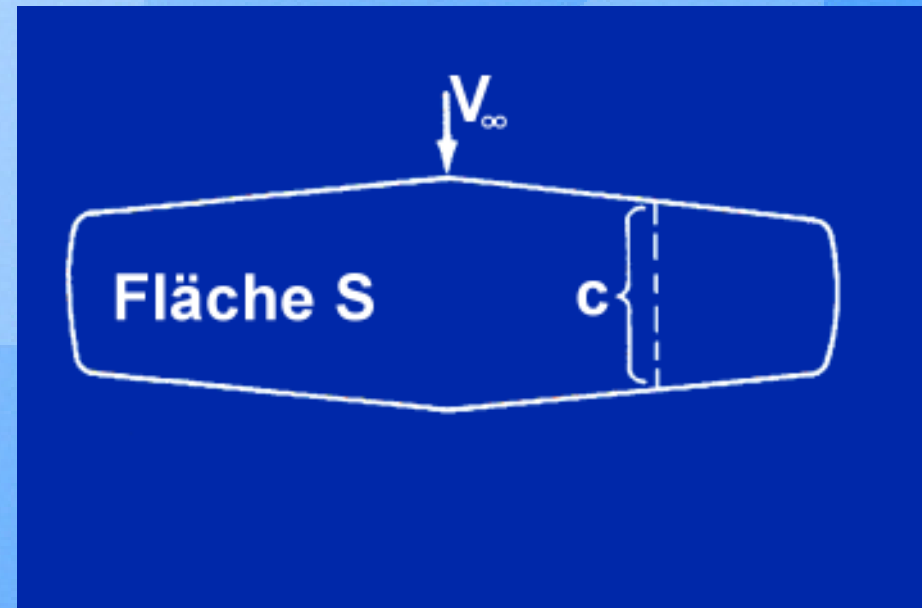


Die Bezugsfläche S für die dimensionslosen Beiwerte ist frei wählbar

In der Flugzeugaerodynamik wird die Flügelfläche als Bezugsfläche gewählt



Beispiele für Bezugsflächen



Flügelfläche als Bezugsfläche

Die Bezugsfläche S für die dimensionslosen Beiwerte ist frei wählbar.

In der Flugzeugaerodynamik wird die Flügelfläche als Bezugsfläche gewählt

In der Kfz-Aerodynamik wird die Querschnittsfläche des Automobils als Bezugsfläche gewählt



Querschnittsfläche als Bezugsfläche

Der dimensionslose Druckbeiwert ist definiert als

$$c_p \equiv \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2$$

und der dimensionslose Reibungsbeiwert als

$$c_f \equiv \frac{\tau}{q_\infty}$$



Der Druckbeiwert kann zur Veranschaulichung über die Flügeltiefe aufgetragen werden

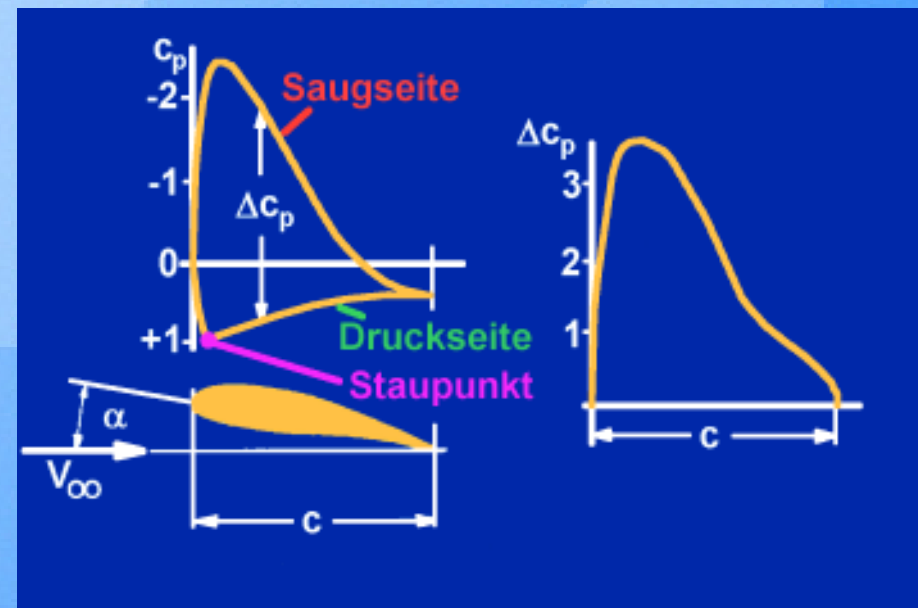
Auf der **Saugseite** herrscht Unterdruck ($c_p < 0$)

Auf der **Druckseite** herrscht Überdruck ($c_p > 0$)

Im sogenannten **Staupunkt** liegt ein Druckbeiwert von eins vor (V ist hier gleich Null)

$$c_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 \stackrel{V=0}{=} 1 - \left(\frac{0}{V_\infty} \right)^2 = 1$$

Weiterhin dient zur Veranschaulichung die Differenz der Druckbeiwerte Δc_p über der Flügeltiefe

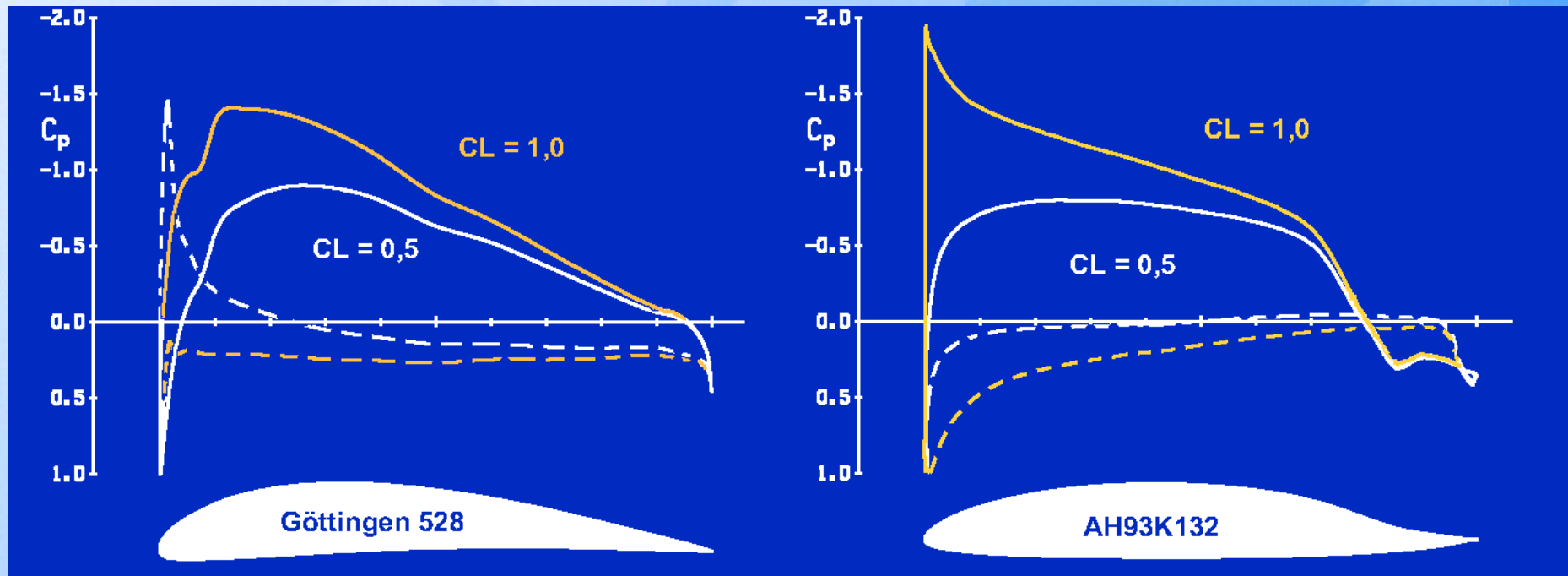


Druckbeiwert über der Flügeltiefe

c_p -Verlauf für verschiedene Profile und Auftriebsbeiwerte

- Tropfenprofil (links)
- Laminarprofil (rechts)

Beim Laminarprofil wird zur Stabilisierung der Grenzschicht ein Druckanstieg über weite Strecken realisiert



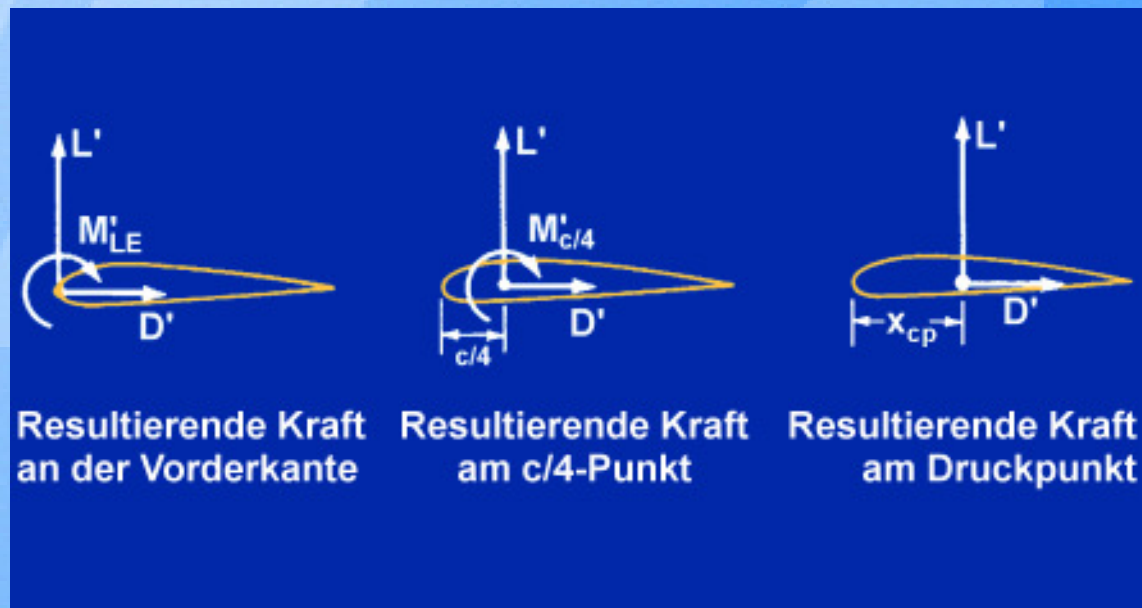
Druckbeiwerte für verschiedene Profile bei $C_L=0,5$ und $C_L=1,0$

Druckpunkt

Wahl des Bezugspunktes für die aerodynamischen Kräfte und Momente :

- Vorderkante : $M'_{LE} > 0 \rightarrow$ schwanzlastig
 $M'_{LE} < 0 \rightarrow$ kopflastig
- c/4-Linie : Moment $M'_{c/4}$ unabhängig vom Anstellwinkel α
- Druckpunkt : Es wirkt kein aerodynamisches Moment

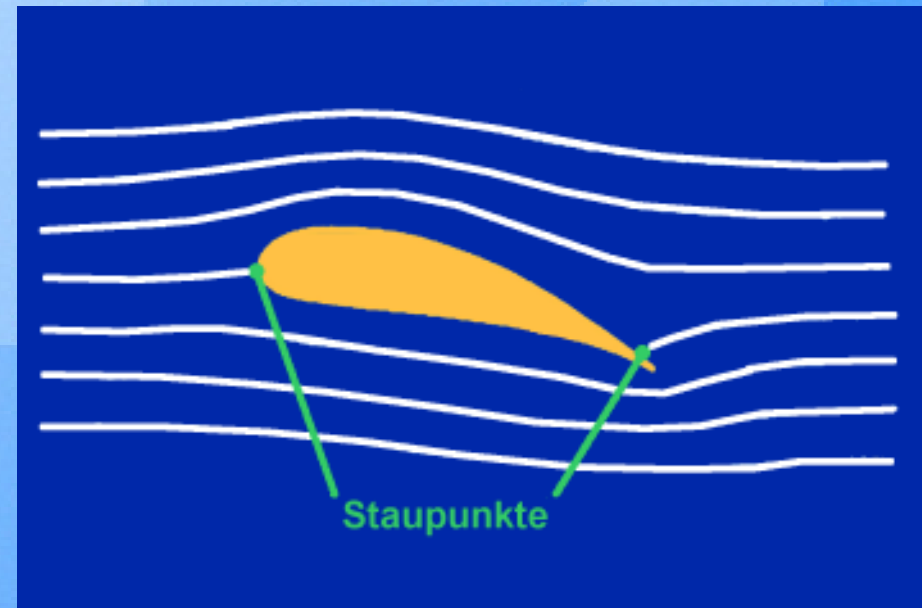
$$x_{cp} = -\frac{M'_{LE}}{N'}$$



Bezugspunkte für die aerodynamischen Kräfte

Kuttasche Abflussbedingung

Bei einem angestellten Flügel ohne Zirkulation liegt der hintere Staupunkt auf der Oberseite

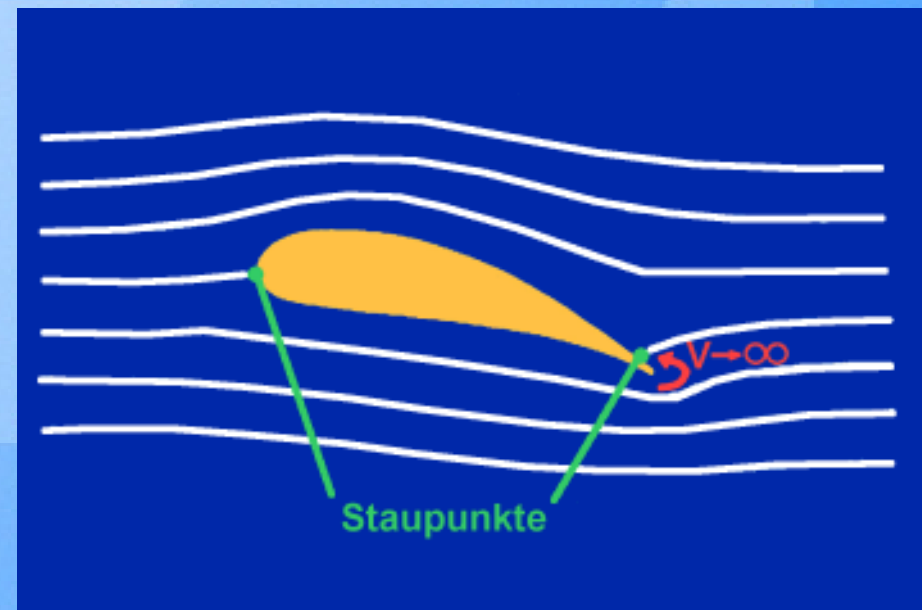


Angestellter Flügel ohne Zirkulation

Kuttasche Abflussbedingung

Bei einem angestellten Flügel ohne Zirkulation liegt der hintere Staupunkt auf der Oberseite

→ Die scharfe Hinterkante wird von unten her mit der theoretischen Geschwindigkeit $V \rightarrow \infty$ umströmt



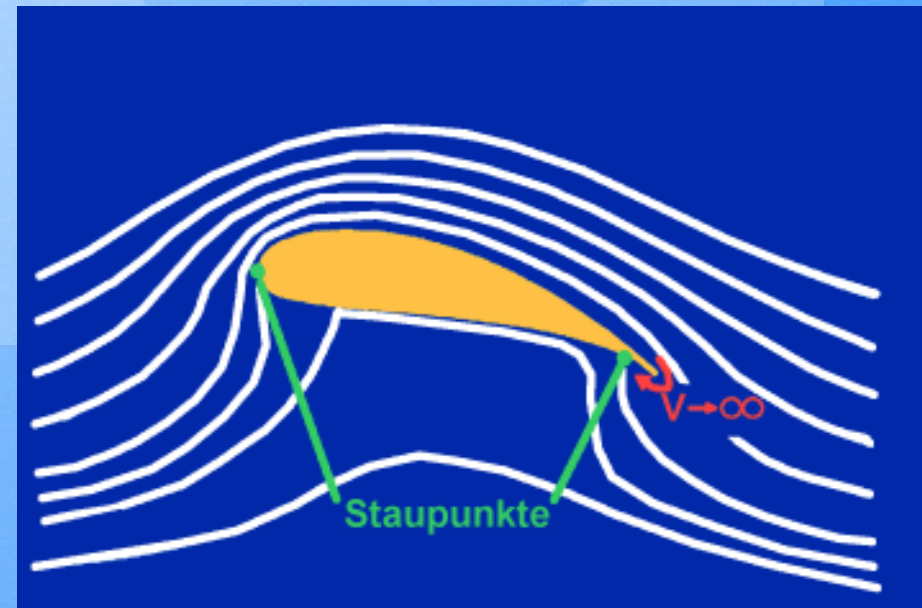
Angestellter Flügel ohne Zirkulation

Kuttasche Abflussbedingung

Bei einem angestellten Flügel ohne Zirkulation liegt der hintere Staupunkt auf der Oberseite

→ Die scharfe Hinterkante wird von unten her mit der theoretischen Geschwindigkeit $V \rightarrow \infty$ umströmt

Bei zu großer Zirkulation wandert der Staupunkt auf die Unterseite (auch hier $V \rightarrow \infty$)



Angestellter Flügel mit großer Zirkulation

Kuttasche Abflussbedingung

Bei einem angestellten Flügel ohne Zirkulation liegt der hintere Staupunkt auf der Oberseite

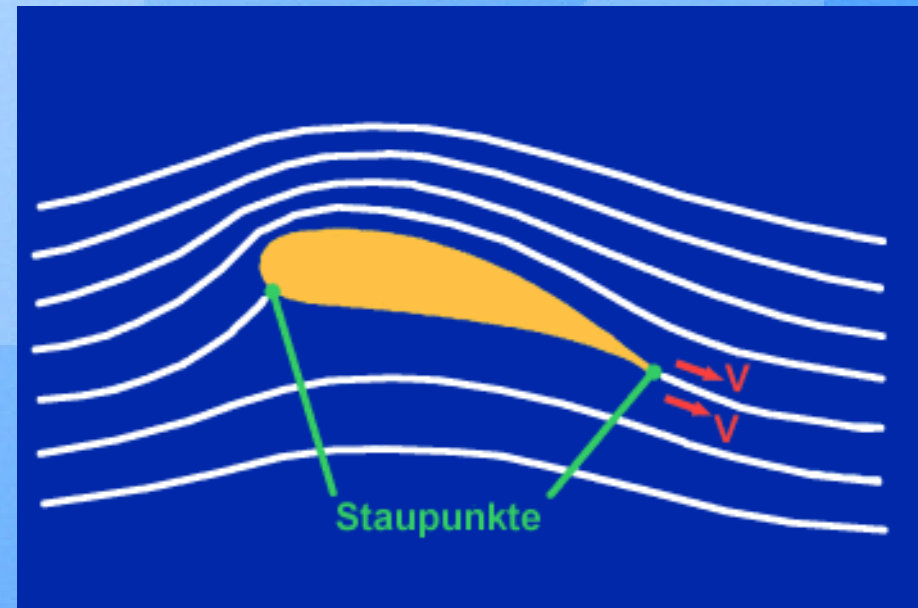
→ Die scharfe Hinterkante wird von unten her mit der theoretischen Geschwindigkeit $V \rightarrow \infty$ umströmt

Bei zu großer Zirkulation wandert der Staupunkt auf die Unterseite (auch hier $V \rightarrow \infty$)

In Wirklichkeit tritt beides nicht ein

→ genau die Zirkulation stellt sich ein, dass der Staupunkt an der Hinterkante liegt


→ glattes Abströmen an der Hinterkante (Kuttasche Abflussbedingung)



Kutta-Bedingung

Das glatte Abströmen an der Hinterkante eines Profils wurde das erste Mal von M.Wilhelm Kutta im Jahr 1902 beobachtet.



 Kutta-Bedingung

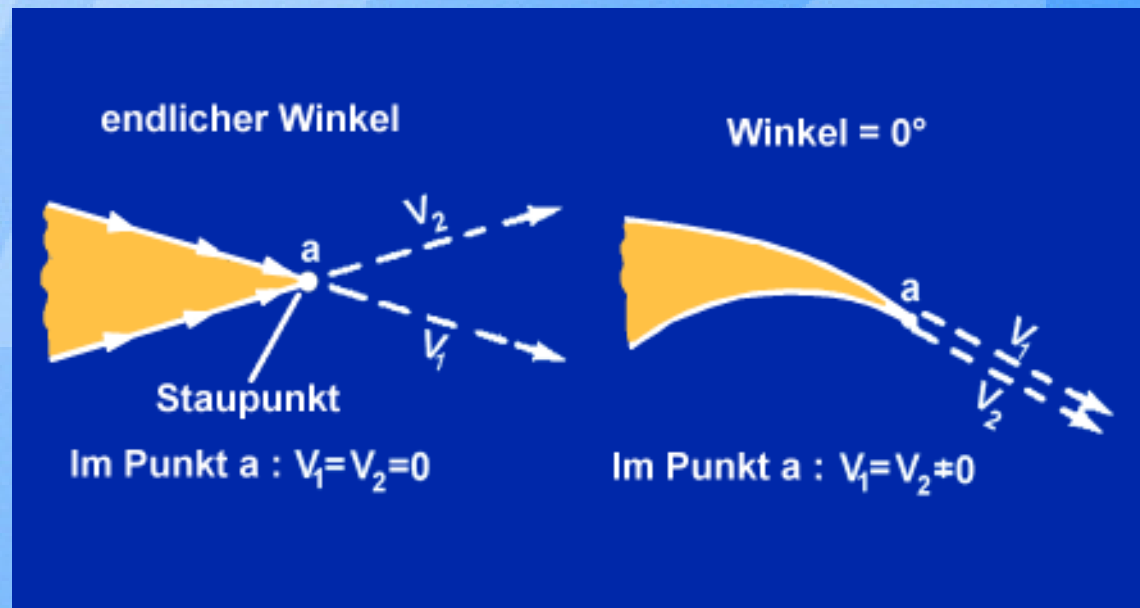
Hinterkante mit endlichem Winkel

Die Kuttasche Abflussbedingung gilt nur für Hinterkanten mit einem Winkel von Null Grad

Bei einem endlichen Hinterkantenwinkel wären im Punkt a zwei verschiedene Geschwindigkeiten mit zwei unterschiedlichen Richtungen vorhanden

→ $V_1 = V_2 = 0$

→ bei einem endlichen Hinterkantenwinkel ist a ein Staupunkt

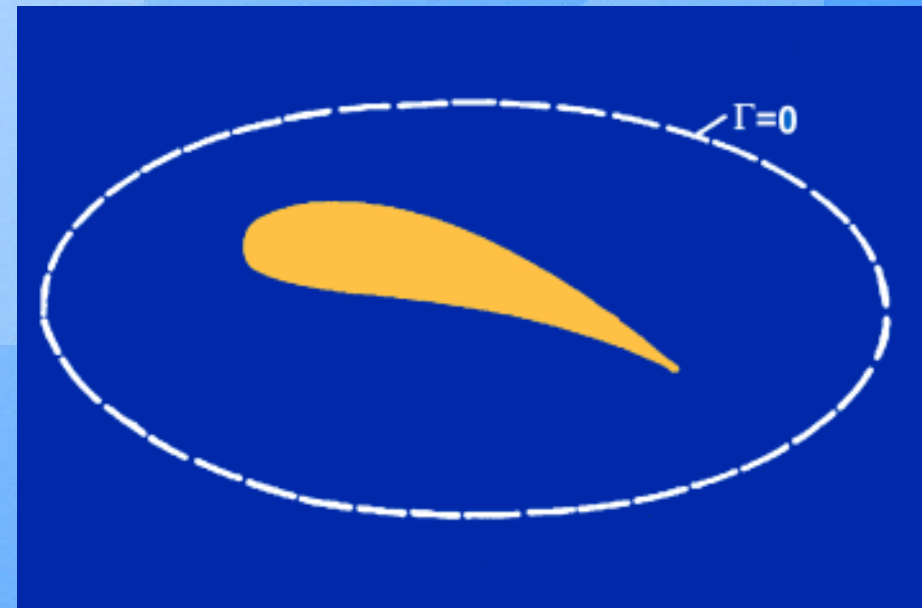


Kutta-Bedingung

Entstehung der Zirkulation um ein Profil

Nach dem Thomsonschen Satz ist die Zirkulation einer materiellen Linie konstant

→ $\Gamma=0$ bei einem Tragflügel in Ruhe



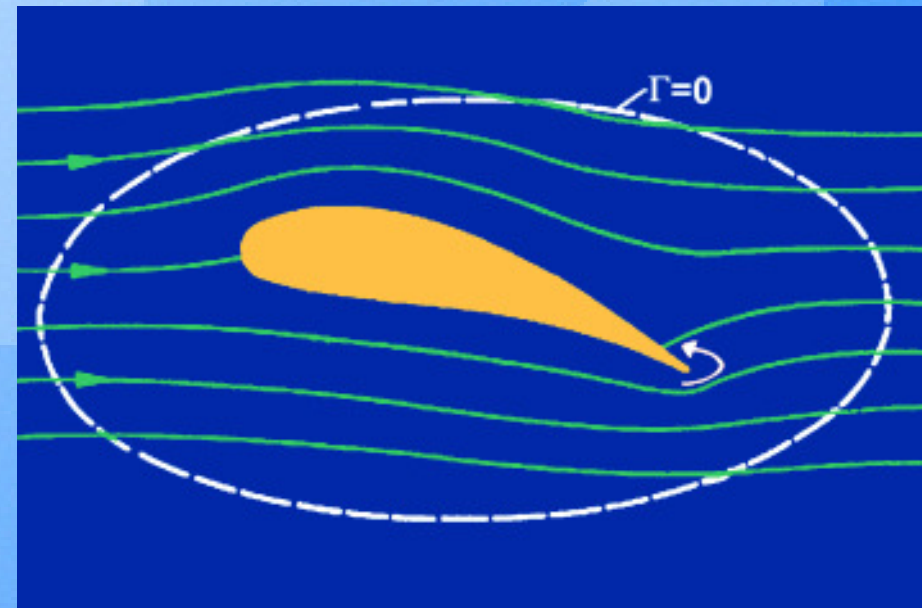
Tragflügel in Ruhe

Entstehung der Zirkulation um ein Profil

Nach dem Thomsonschen Satz ist die Zirkulation einer materiellen Linie konstant

→ $\Gamma=0$ bei einem Tragflügel in Ruhe

Wird das Profil aus der Ruhe heraus bewegt, bildet sich erst der reibungsfreie Zustand mit Umströmung der Hinterkante



Tragflügel der aus der Ruhe heraus bewegt wird

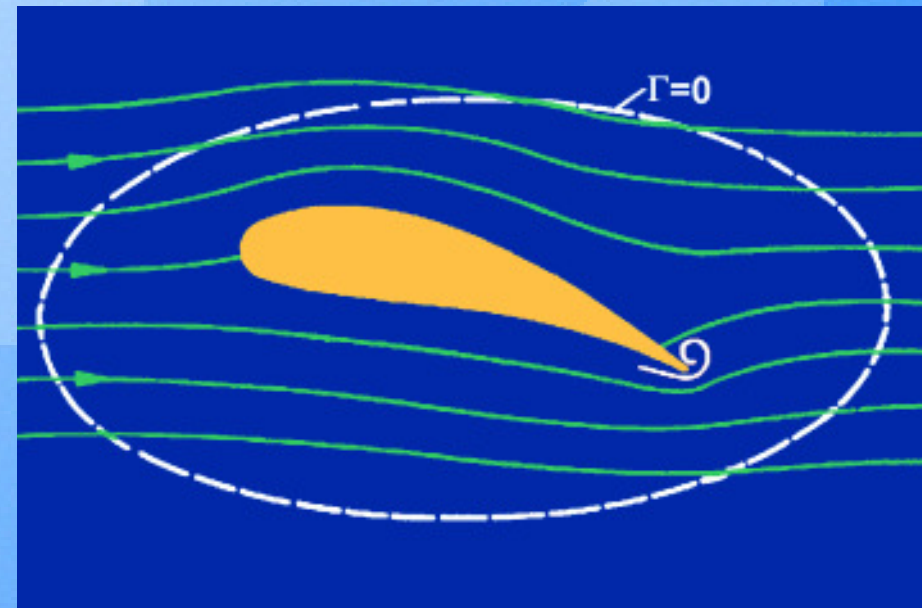
Entstehung der Zirkulation um ein Profil

Nach dem Thomsonschen Satz ist die Zirkulation einer materiellen Linie konstant

→ $\Gamma=0$ bei einem Tragflügel in Ruhe

Wird das Profil aus der Ruhe heraus bewegt, bildet sich erst der reibungsfreie Zustand mit Umströmung der Hinterkante

Infolge der Reibung bildet sich an der Hinterkante ein linksdrehender Wirbel



Tragflügel der aus der Ruhe heraus bewegt wird

Entstehung der Zirkulation um ein Profil

Nach dem Thomsonschen Satz ist die Zirkulation einer materiellen Linie konstant

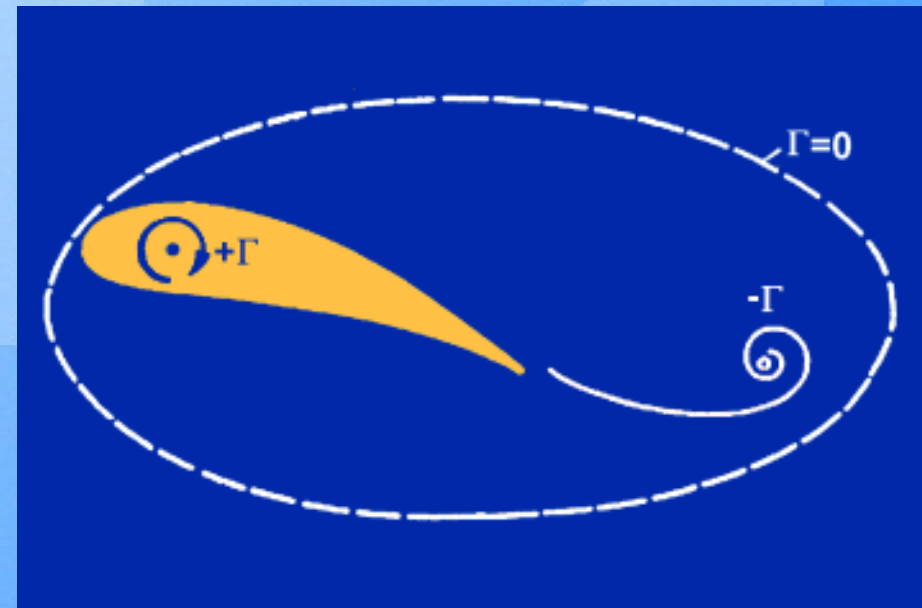
→ $\Gamma=0$ bei einem Tragflügel in Ruhe

Wird das Profil aus der Ruhe heraus bewegt, bildet sich erst der reibungsfreie Zustand mit Umströmung der Hinterkante

Infolge der Reibung bildet sich an der Hinterkante ein linksdrehender Wirbel

Der Wirbel wandert vom Flügel als sogenannter Anfahrwirbel weg

Da nach dem Satz von Thomson die Zirkulation konstant bleiben muss, bildet sich am Flügel ein entgegengerichteter, sogenannter gebundener Wirbel



Bewegter Tragflügel

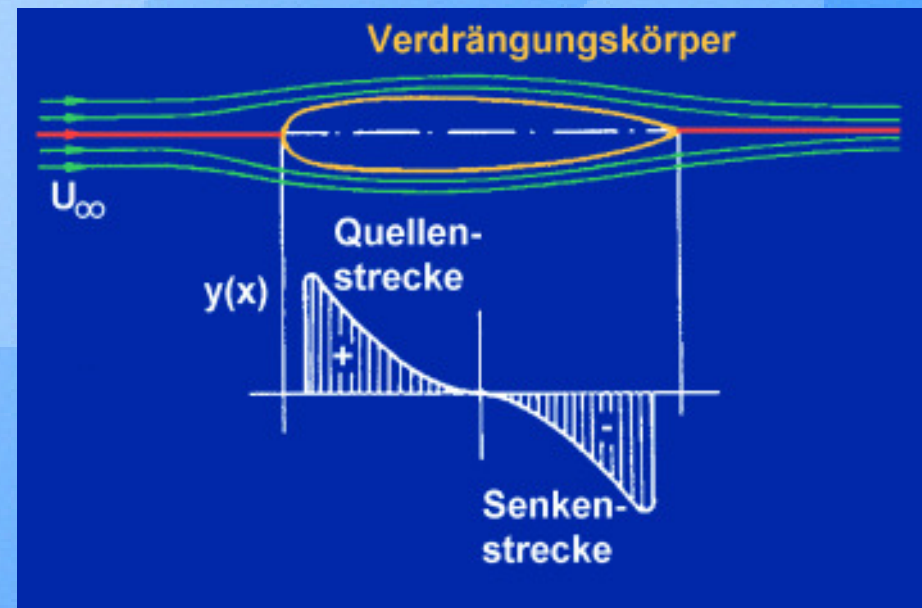
GENERATION OF CIRCULATION AND LIFT FOR AN AIRFOIL

 *Entstehung der Zirkulation um ein Profil*



Verdrängungsproblem

Beim Verdrängungsproblem wird auf der Profelsehne eine Quellen-Senken-Verteilung so angeordnet, dass sich eine **Verzweigungsstromlinie** bildet, die die **Profilkontur** wiedergibt

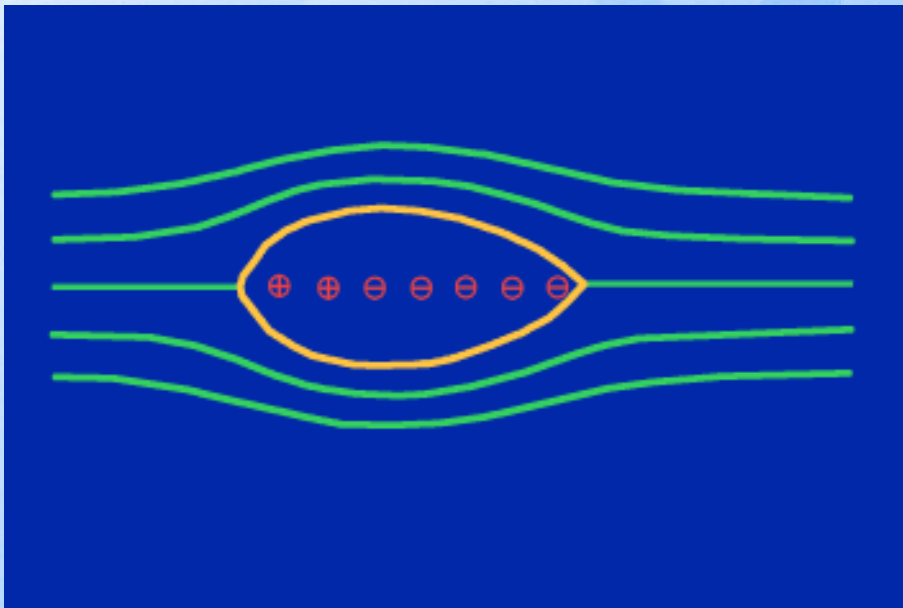


Verdrängungsproblem

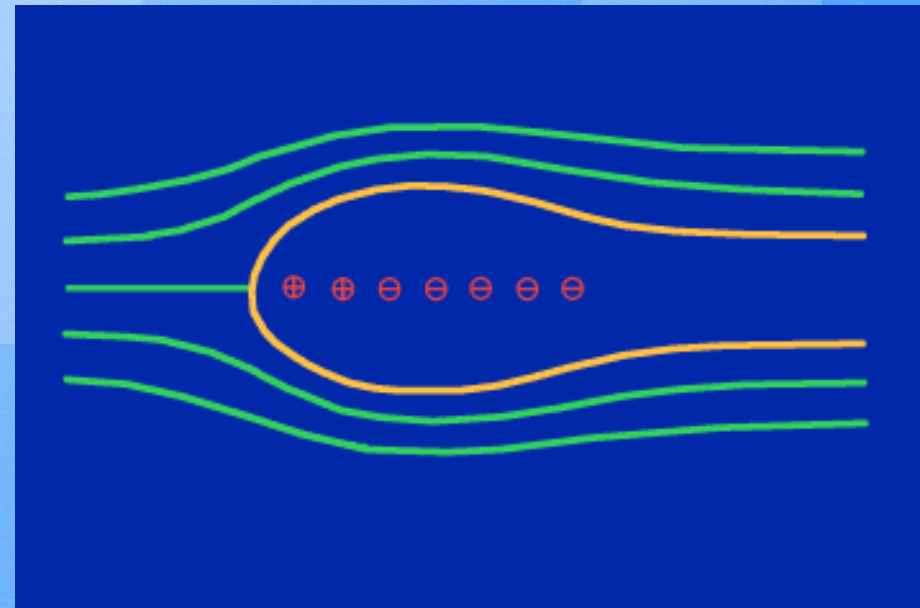
Verdrängungsproblem

Beim Verdrängungsproblem wird auf der Profilsehne eine Quellen-Senken-Verteilung so angeordnet, dass sich eine Verzweigungsstromlinie bildet, die die Profilkontur wiedergibt

Um eine geschlossene Kontur zu erhalten muss die Summe der Quellen- und Senkenstärken gleich Null sein



Quellen-Senkenstärke (von links nach rechts) : $+1,0 +0,4 -0,2 -0,3 -0,4 -0,5 = 0$



Quellen-Senkenstärke (von links nach rechts) : $+1,0 +0,5 -0,2 -0,3 -0,4 -0,4 \neq 0$



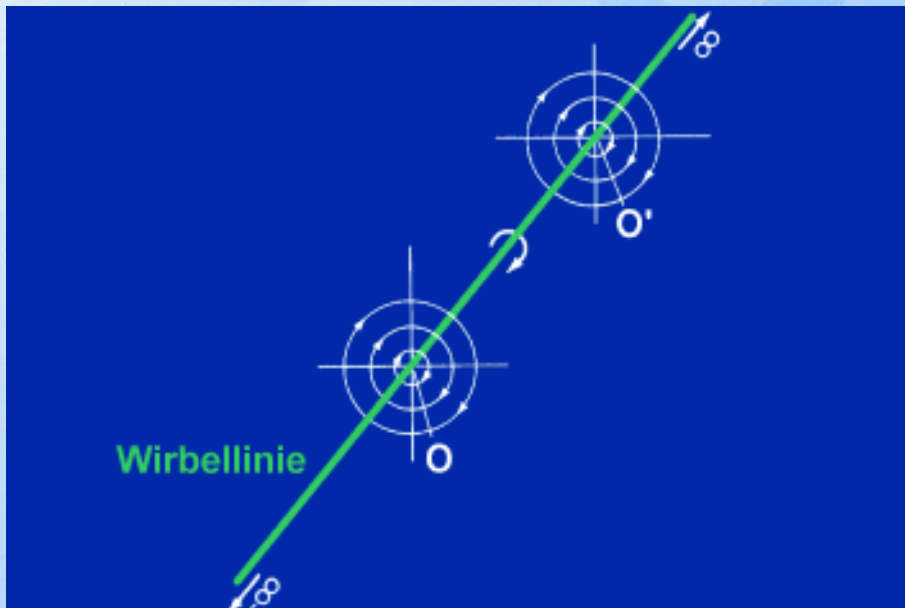
Auftriebsproblem (Skeletttheorie)

Grundlage :

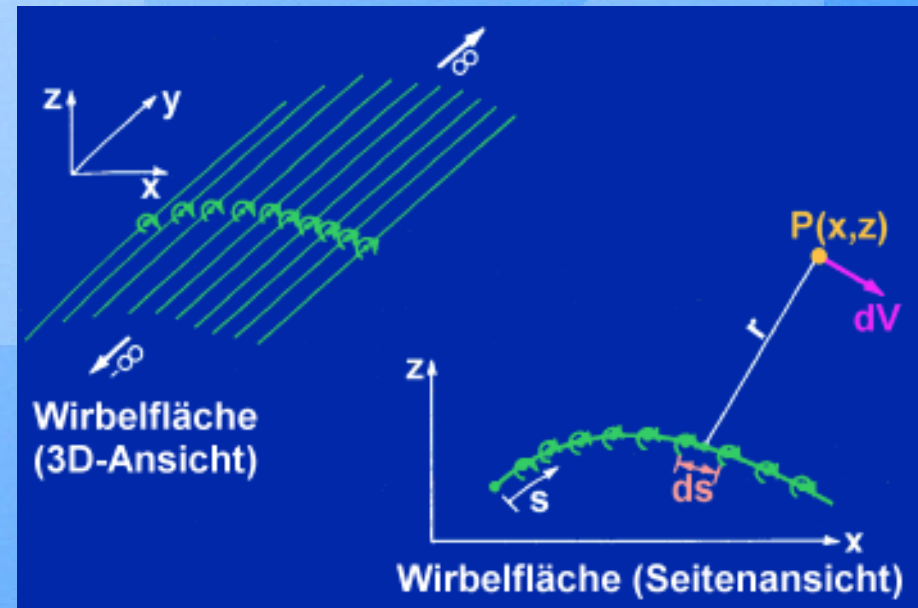
Einzelne **Wirbellinien** sind zu einer **Wirbelfläche** angeordnet

Jedes **Wirbelsegment** ds induziert an einem **Punkt** $P(x,y)$ die **Geschwindigkeit**

$$dV = -\frac{\gamma ds}{2\pi r}$$



Einzelne Wirbellinie



Wirbelfläche

Die Gesamtsumme der am Punkt P induzierten Geschwindigkeiten dV müsste vektoriell addiert werden

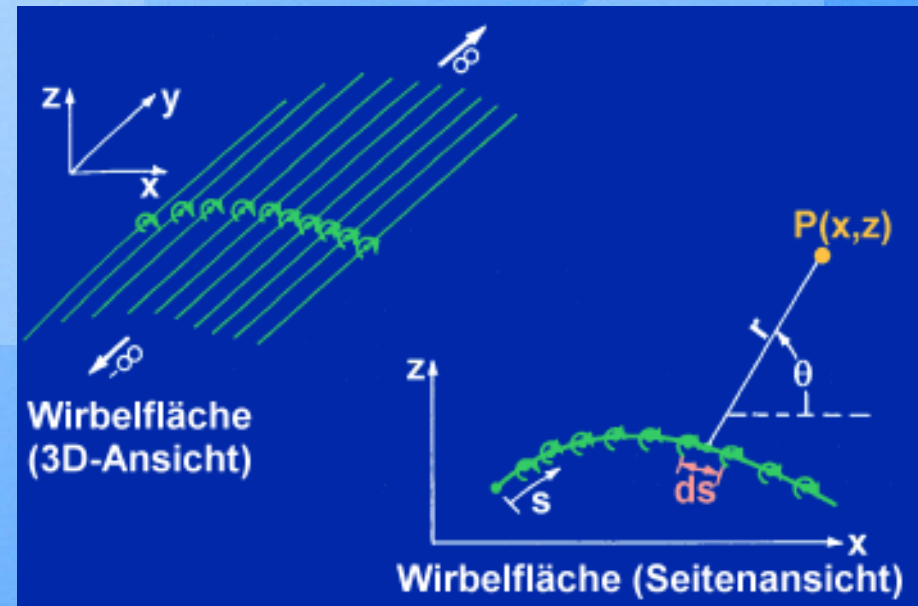
→ einfacher das Potential zu betrachten

Das an einem Punkt $P(x,y)$ induzierte Potential durch das Wirbelsegment ds beträgt :

$$d\phi = -\frac{\gamma ds}{2\pi} \theta$$

Das gesamte im Punkt $P(x,y)$ induzierte Potential beträgt :

$$\phi(x,z) = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b \theta \gamma ds$$



Wirbelfläche

Die Zirkulation ist die Summe der Stärken der einzelnen Elementarwirbel :

$$\Gamma = \int_a^b \gamma ds$$



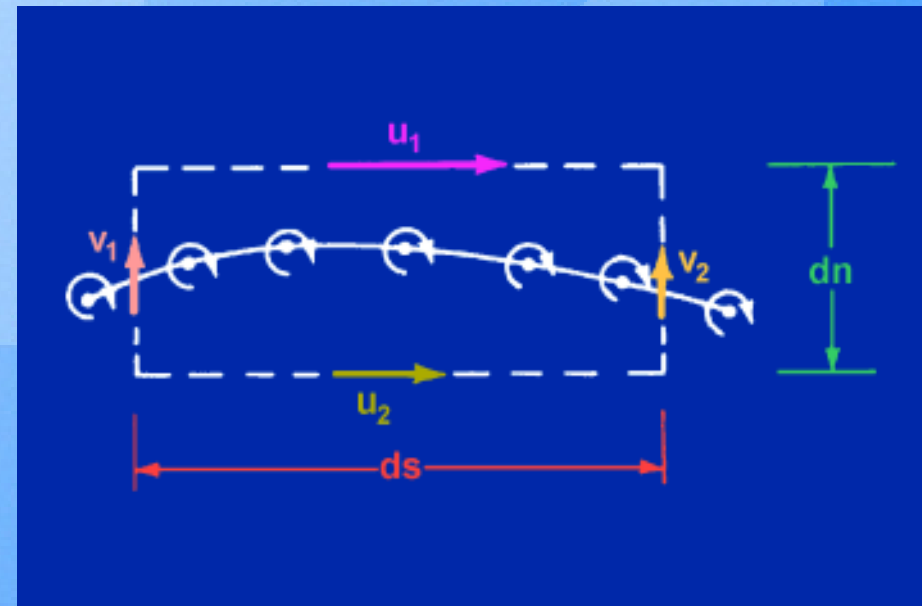
Zusammenhang zwischen Wirbelstärke und Änderung der Tangentialgeschwindigkeit

Die Zirkulation entlang der gestrichelten Linie beträgt:

$$\Gamma = -(\mathbf{v}_2 \mathbf{dn} - \mathbf{u}_1 \mathbf{ds} - \mathbf{v}_1 \mathbf{dn} + \mathbf{u}_2 \mathbf{ds})$$

bzw.

$$\Gamma = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \mathbf{ds} + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \mathbf{dn}$$



Zirkulation einer Wirbelfläche

Zusammenhang zwischen Wirbelstärke und Änderung der Tangentialgeschwindigkeit

Die Zirkulation entlang der gestrichelten Linie beträgt:

$$\Gamma = -(v_2 dn - u_1 ds - v_1 dn + u_2 ds)$$

bzw.

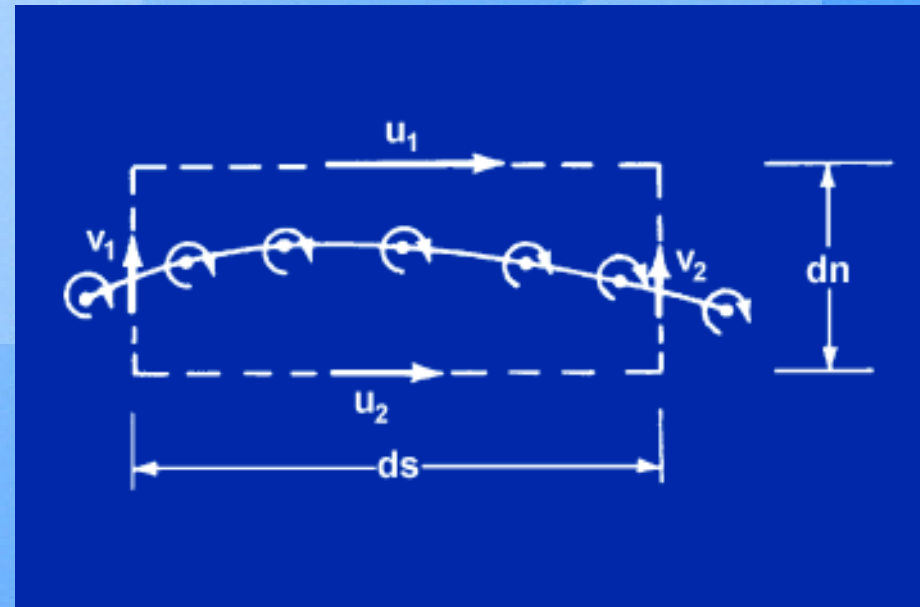
$$\Gamma = (u_1 - u_2)ds + (v_1 - v_2)dn$$

Die Wirbelstärke innerhalb der gestrichelten Linie beträgt

$$\Gamma = \gamma ds$$

und es folgt

$$\gamma ds = (u_1 - u_2)ds + (v_1 - v_2)dn$$



Zirkulation einer Wirbelfläche

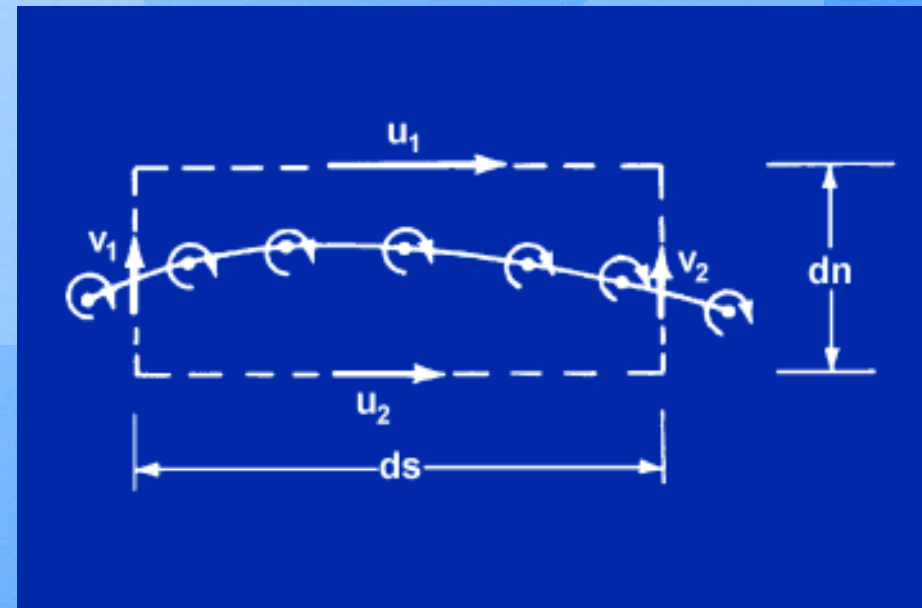
Nähern sich die obere und die untere gestrichelte Linie der Wirbelfläche an ($dn \rightarrow 0$) ergibt das

$$\gamma ds = (u_1 - u_2) ds$$

und es folgt

$$\gamma = u_1 - u_2$$

Die Gleichung sagt aus, dass der Sprung in der Geschwindigkeit gleich der lokalen Wirbelstärke ist



Zirkulation einer Wirbelfläche

Anwendung auf ein Profil

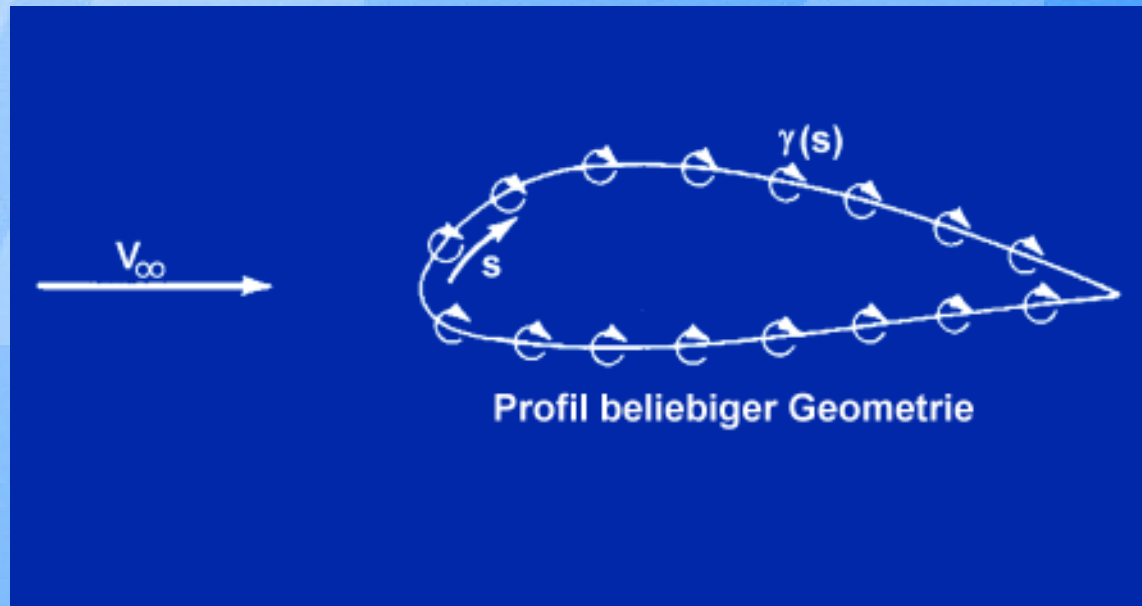
Die Wirbelverteilung wird so gewählt, dass die Fläche des Profils eine Stromlinie ist

Die gesamte Wirbelstärke beträgt

$$\Gamma = \int \gamma ds$$

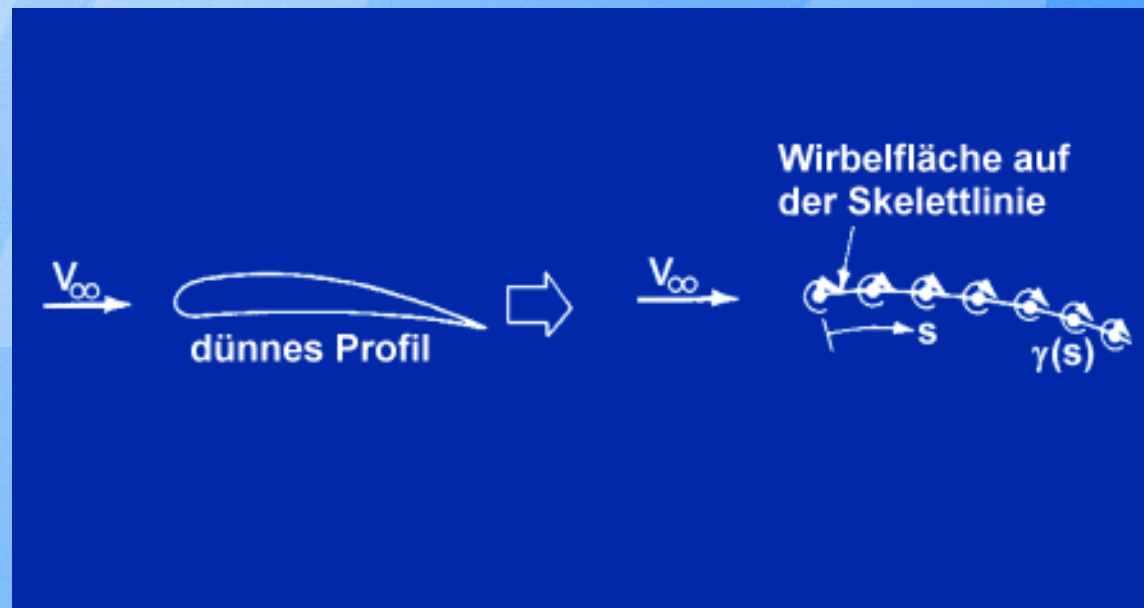
und mit dem Satz von Kutta-Joukowski folgt der Auftrieb

$$L' = -\rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma$$



Profilkontur als Wirbelfläche

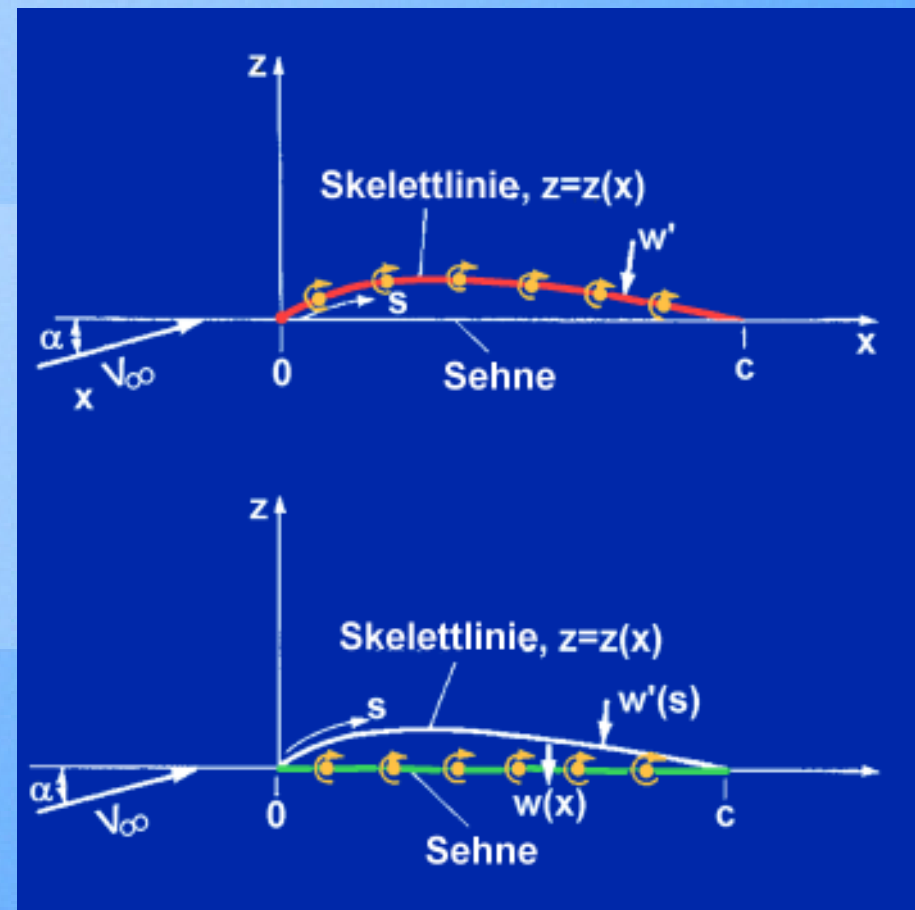
Bei schlanken Profilen kann die Wirbelverteilung näherungsweise auf die Skelettlinie gelegt werden



Wirbelverteilung entlang der Skelettlinie

Theorie dünner Profile

Die **Wirbelverteilung** wird von der **Skelettebene** auf die **Sehnenebene** gelegt



Theorie dünner Profile

Theorie dünner Profile

Die Wirbelverteilung wird von der Skelettebene auf die Sehnenebene gelegt

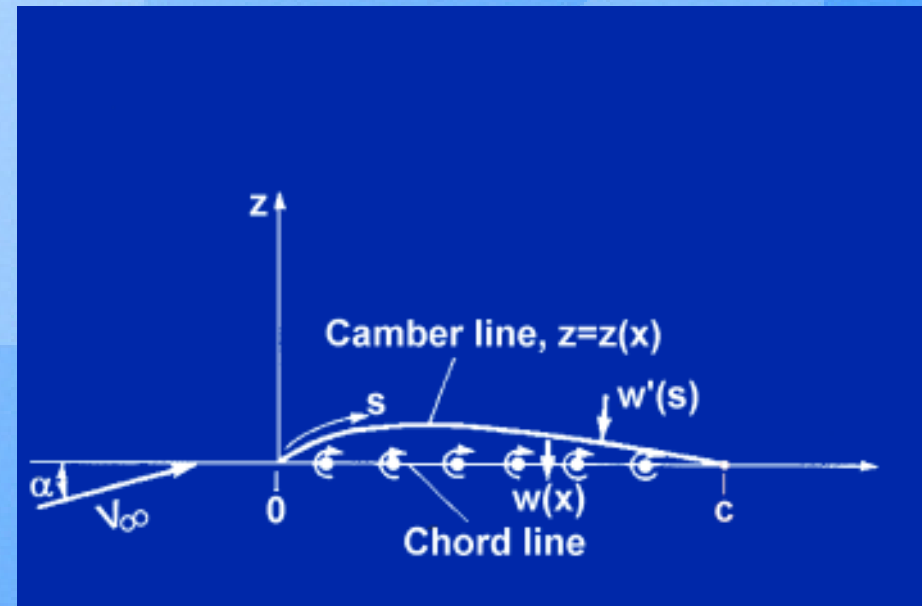
Randbedingung :

Die Kuttasche Abflussbedingung muss im Punkt c erfüllt sein

$$\gamma(c) = 0$$

Die Komponente der Anströmgeschwindigkeit senkrecht zur Skelettlinie $V_{\infty,n}$ und die durch die Wirbel induzierte Geschwindigkeit $w'(s)$ müssen zusammen Null ergeben

$$V_{\infty,n} + w'(s) = 0$$



Theorie dünner Profile

Die Geschwindigkeitskomponente $V_{\infty,n}$ kann ausgedrückt werden als

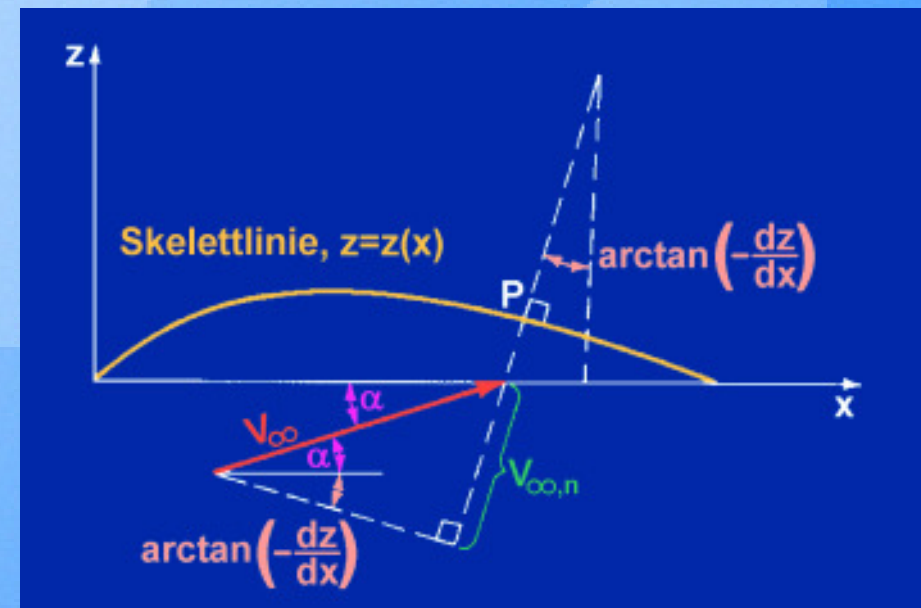
$$V_{\infty,n} = V_{\infty} \sin \left[\alpha + \arctan \left(-\frac{dz}{dx} \right) \right]$$

Bei dünnen Profilen mit kleinen Anstellwinkeln gilt die Vereinfachung (allg. Darstellung)

$$\sin(\varphi) \approx \tan(\varphi) \approx \varphi$$

und die Gleichung für die Geschwindigkeit $V_{\infty,n}$ lautet

$$V_{\infty,n} = V_{\infty} \left(\alpha - \frac{dz}{dx} \right)$$



Geometrische Beziehungen

Für die induzierte Geschwindigkeit gilt unter der Annahme eines dünnen Profils

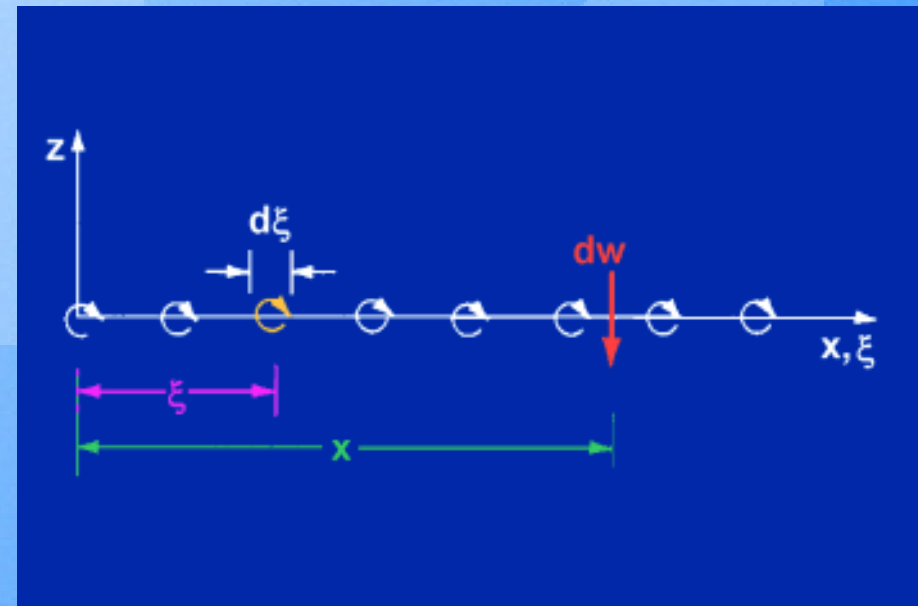
$$w'(s) \approx w(x)$$

Zur Berechnung der induzierten Geschwindigkeit $w(x)$ wird die durch den **Elementarwirbel** an der **Stelle ξ** induzierte **Geschwindigkeit dw** am **Punkt x** betrachtet

$$dw = \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x - \xi)}$$

Integriert von der Vorderkante bis zur Hinterkante ergibt sich die induzierte Geschwindigkeit

$$w(x) = \int_0^c \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(x - \xi)}$$



Wirbelverteilung entlang der Sehne

Die Gleichung für die Geschwindigkeiten $V_{\infty,n}$ und $w'(s)$ in Gleichung

$$V_{\infty,n} + w'(s) = 0$$

eingesetzt führt zu

$$V_{\infty} \left(\alpha - \frac{dz}{dx} \right) + \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{2\pi(x - \xi)} = 0$$

und umgeformt folgt die Grundgleichung der Theorie dünner Profile

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{(x - \xi)} = V_{\infty} \left(\alpha - \frac{dz}{dx} \right)$$

HINWEIS : Wenn α und dz/dx bekannt sind lässt sich mit der Gleichung die Wirbelverteilung $\gamma(\xi)$ bestimmen



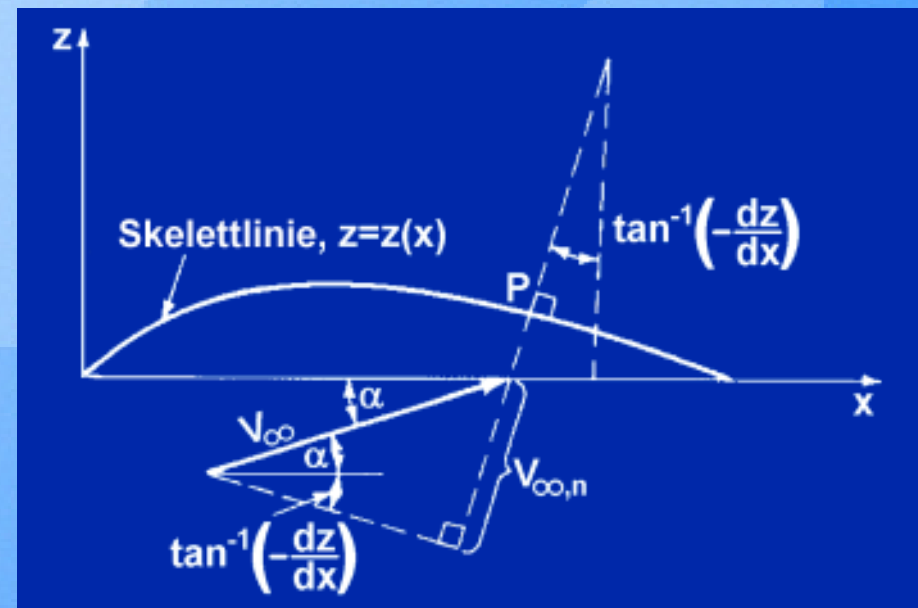
Berechnung eines symmetrischen Profils

Bei symmetrischen Profilen liegt die Skelettlinie auf der Sehne und deswegen gilt

$$\frac{dz}{dx} = 0$$

Einsetzen in die Grundgleichung für dünne Profile liefert

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{(x - \xi)} = V_\infty \alpha$$



Geometrische Beziehungen

Zum Lösen der Gleichung

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{(x - \xi)} = V_\infty \alpha$$

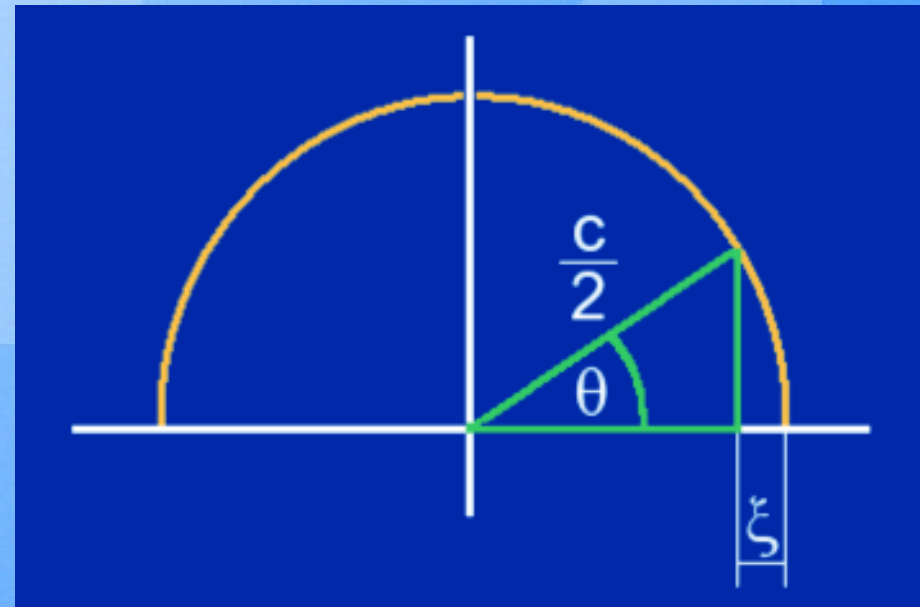
werden die folgenden Transformationen verwendet

$$\xi = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta)$$

$$d\xi = \frac{c}{2} \sin(\theta) d\theta$$

$$x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta_0)$$

HINWEIS : Die Integrationsgrenzen ändern sich mit der Transformation von $\xi = 0$ und $\xi = c$ in $\theta = 0$ und $\theta = \pi$



Transformationsbeziehungen

Durch Einsetzen der Transformationen folgt

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin(\theta) d\theta}{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} = V_\infty \alpha$$

und mit dem Glauert-Integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\theta) d\theta}{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} = \frac{\pi \sin(n\theta_0)}{\sin(\theta_0)}$$

folgt

$$\gamma(\theta) = -2\alpha V_\infty \frac{(1 + \cos(\theta))}{\sin \theta}$$

An der Hinterkante ($\theta = \pi$) gilt

$$\gamma(\pi) = -2\alpha V_\infty \frac{0}{0}$$

und mit dem Satz von L'Hospital

$$\gamma(\pi) = -2\alpha V_\infty \frac{-\sin(\pi)}{\cos(\pi)} = 0$$



Zur Berechnung des Auftriebs muss nach Kutta-Joukowski

$$L' = -\rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma$$

die Zirkulation bekannt sein

Die gesamte Zirkulation um das Profil beträgt

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(\xi) d\xi$$

Die Anwendung der Transformationsgleichungen führt zu

$$\Gamma = \frac{c}{2} \int_0^{\pi} \gamma(\theta) \sin(\theta) d\theta$$

und Einsetzen der Gleichung von Folie 59 (unten) liefert

$$\Gamma = -\alpha c V_{\infty} \int_0^{\pi} (1 + \cos(\theta)) d\theta = -\pi \alpha c V_{\infty}$$



Die Gleichung

$$\Gamma = -\alpha c V_{\infty} \int_0^{\pi} (1 + \cos(\theta)) d\theta = -\pi \alpha c V_{\infty}$$

in den Satz von Kutta-Joukowski $L' = -\rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma$ eingesetzt ergibt den Auftrieb

$$L' = \pi \alpha c \rho_{\infty} V_{\infty}^2$$

Der Auftrieb

$$L' = \pi \alpha c \rho_{\infty} V_{\infty}^2$$

und die Gleichung

$$q_{\infty} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2$$

in die Definition des Auftriebsbeiwertes

$$c_l = \frac{L'}{q_{\infty} c}$$

eingesetzt liefert

$$c_l = \frac{\pi \alpha c \rho_{\infty} V_{\infty}^2}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c}$$



Kürzen

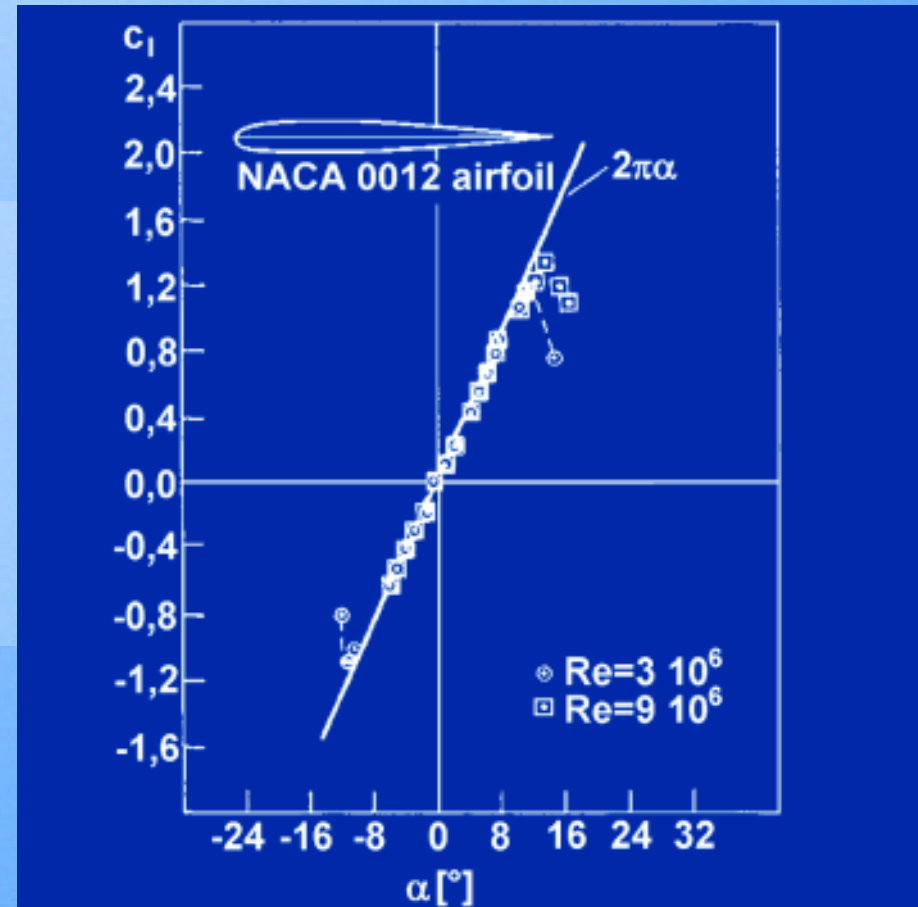
$$c_l = \frac{\pi \alpha \cancel{\rho_\infty} \cancel{V_\infty^2}}{\frac{1}{2} \cancel{\rho_\infty} \cancel{V_\infty^2} c}$$

führt auf die wichtige Gleichung

$$c_l = 2\pi\alpha$$

und die Steigung für die Gerade
des Auftriebsbeiwertes

$$\frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi$$



Beispiel für ein c_l - α -Diagramm mit 2π -Gerade und Messergebnissen

Zur Berechnung des Moments an der Profilvorderkante wird die Zirkulation eines Elementarwirbels betrachtet

$$d\Gamma = \gamma(\xi)d\xi$$

$d\Gamma$ erzeugt die Auftriebskraft

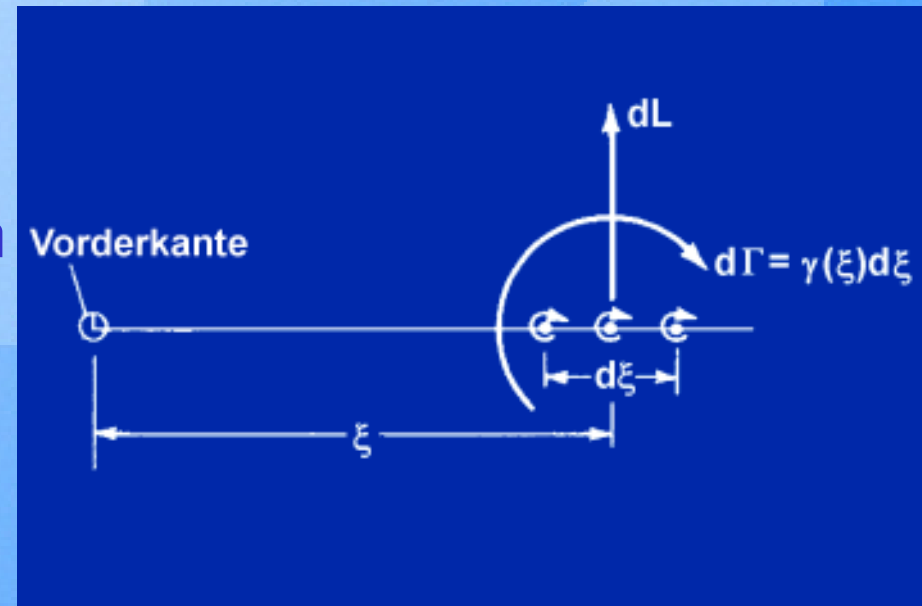
$$dL' = -\rho_{\infty} V_{\infty} d\Gamma$$

dL erzeugt um die Vorderkante das Moment

$$dM' = -\xi dL'$$

Das gesamte Moment folgt durch Integration

$$M'_{LE} = \int_0^c \xi(dL) = \rho_{\infty} V_{\infty} \int_0^c \xi \gamma(\xi) d\xi$$



Berechnung des Moments an der Profilvorderkante

Mit den schon für den Auftrieb verwendeten Transformationen wird das Integral gelöst

$$M'_{LE} = -q_{\infty} c^2 \frac{\pi \alpha}{2}$$

Mit der Definition für den Momentenbeiwert

$$C_{m,Le} = \frac{M'_{LE}}{q_{\infty} c^2}$$

und einigem Umformen folgt

$$C_{m,LE} = -\frac{\pi \alpha}{2}$$



Die beiden Gleichungen

$$c_l = 2\pi\alpha$$

$$c_{m,LE} = -\frac{\pi\alpha}{2}$$

ineinander eingesetzt ergeben den Zusammenhang

$$c_{m,LE} = -\frac{c_l}{4}$$

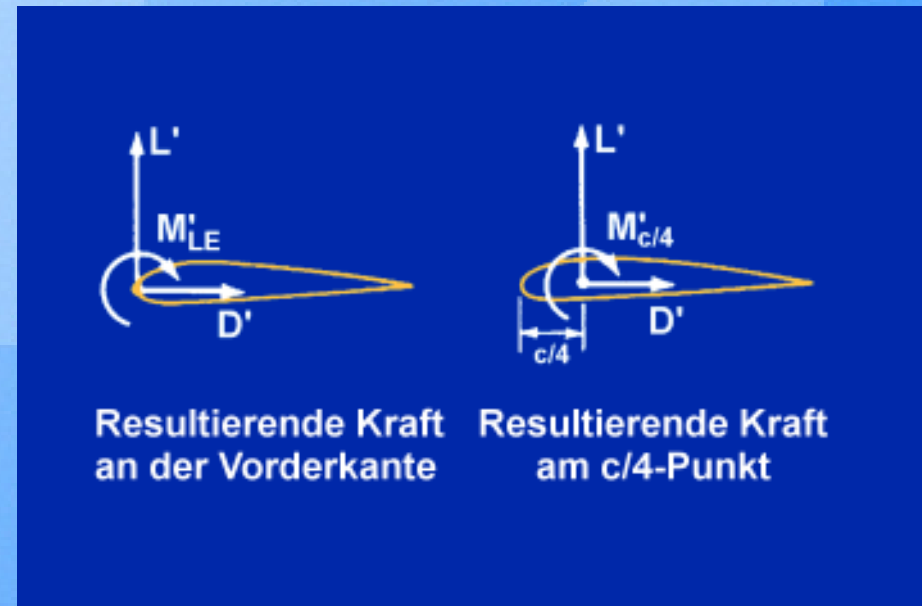


Der Zusammenhang

$$M'_{LE} = -\frac{c}{4}L' + M'_{c/4}$$

liefert in dimensionslosen Größen die Gleichung

$$C_{m,c/4} = C_{m,LE} + \frac{C_l}{4}$$



Momente und Kräfte an einem Profil

Der Zusammenhang

$$M'_{LE} = -\frac{c_l}{4} L' + M'_{c/4}$$

liefert in dimensionslosen Größen die Gleichung

$$C_{m,c/4} = C_{m,LE} + \frac{C_l}{4}$$

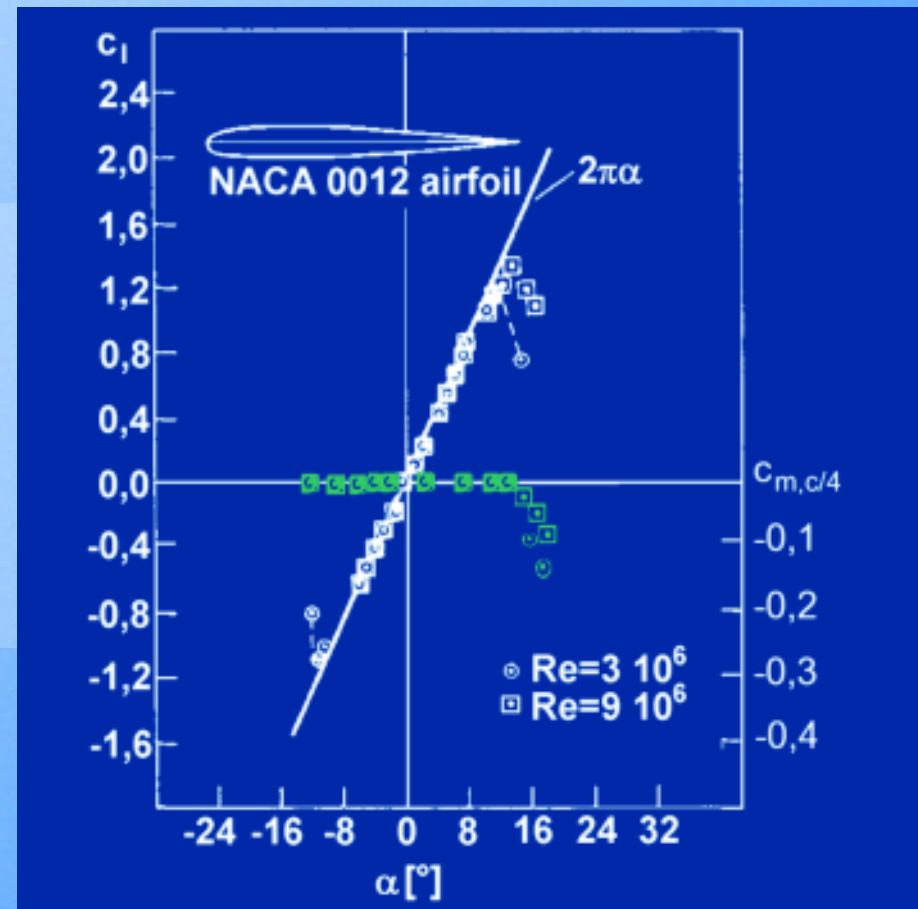
und mit der Gleichung

$$C_{m,LE} = \frac{C_l}{4}$$

folgt

$$C_{m,c/4} = 0$$

→ Druckpunkt und c/4-Linie fallen zusammen



Beispiel für ein c_l -(c_m)- α -Diagramm mit 2π -Gerade und Messergebnissen

Gewölbte Profile (allgemeiner Fall)

Ausgangspunkt ist wie bei den symmetrischen Profilen die Gleichung

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{(x - \xi)} = V_\infty \left(\alpha - \frac{dz}{dx} \right)$$

Das Lösen der Gleichung für den allgemeinen Fall

$$\frac{dz}{dx} \neq 0$$

führt zu einer Lösung in Form einer Fourier-Reihe

$$\gamma(\theta) = -2V_\infty \left(A_0 \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right)$$



Abhängigkeit der Koeffizienten

$$A_0 = f\left(\frac{dz}{dx}, \alpha\right)$$

$$A_n = f\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

Einsetzen der Gleichung

$$\gamma(\theta) = -2V_\infty \left(A_0 \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right)$$

in die Ausgangsgleichung liefert

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{A_0 (1 + \cos(\theta)) d\theta}{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{A_n \sin(n\theta) \sin(\theta) d\theta}{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} = \alpha - \frac{dz}{dx}$$



Die Integrale der Gleichung

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{A_0 (1 + \cos(\theta)) d\theta}{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{A_n \sin(n\theta) \sin(\theta) d\theta}{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} = \alpha - \frac{dz}{dx}$$

werden mit Glauert-Integralen gelöst und die Gleichung reduziert sich auf

$$-A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta_0) = \alpha - \frac{dz}{dx}$$

bzw.

$$\frac{dz}{dx} = (\alpha + A_0) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta_0)$$



Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = (\alpha + A_0) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta_0)$$

hat die Form einer Fourier-Cosinus-Reihe

$$f(\theta) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\theta_0)$$

allgemeine
Koeffizienten

$$B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) d\theta$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

Koeffizienten für die
obere Gleichung

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} d\theta_0$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} \cos(n\theta_0) d\theta_0$$

Gleichung

$$\gamma(\theta) = -2V_\infty \left(A_0 \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right)$$

in die Gleichung für die Zirkulation

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(\xi) d\xi = \frac{c}{2} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin(\theta) d\theta$$

eingesetzt ergibt

$$\Gamma = -cV_\infty \left[A_0 \int_0^\pi (1 + \cos(\theta)) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \sin(n\theta) \sin(\theta) d\theta \right]$$



Mit den Lösungen für die Integrale

$$\int_0^c (1 + \cos(\theta)) d\theta = \pi$$

$$\int_0^\pi \sin(n\theta) \sin(\theta) d\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n \neq 1 \end{cases}$$

wird aus der Gleichung

$$\Gamma = -cV_\infty \left[A_0 \int_0^c (1 + \cos(\theta)) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \sin(n\theta) \sin(\theta) d\theta \right]$$

die Gleichung

$$\Gamma = -cV_\infty \left(\pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_1 \right)$$

Aus der Zirkulation lässt sich der Auftrieb berechnen

$$L' = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c \left(\pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_1 \right)$$

und damit der Auftriebsbeiwert

$$c_l = \frac{L'}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c} = \pi (2A_0 + A_1)$$

Einsetzen der Fourier-Koeffizienten liefert

$$c_l = 2\pi \left[\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} (\cos(\theta_0) - 1) d\theta_0 \right]$$



Differenzieren der Gleichung

$$c_l = 2\pi \left[\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} (\cos(\theta_0) - 1) d\theta_0 \right]$$

nach α ergibt die Steigung des Auftriebsbeiwertes

$$\frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi$$

→ die Steigung des Auftriebsbeiwertes ist auch bei gewölbten Profilen 2π



Aus der Grafik ist ersichtlich, dass für den Auftriebsbeiwert gilt

$$c_l = \frac{dc_l}{d\alpha} (\alpha - \alpha_{L=0})$$

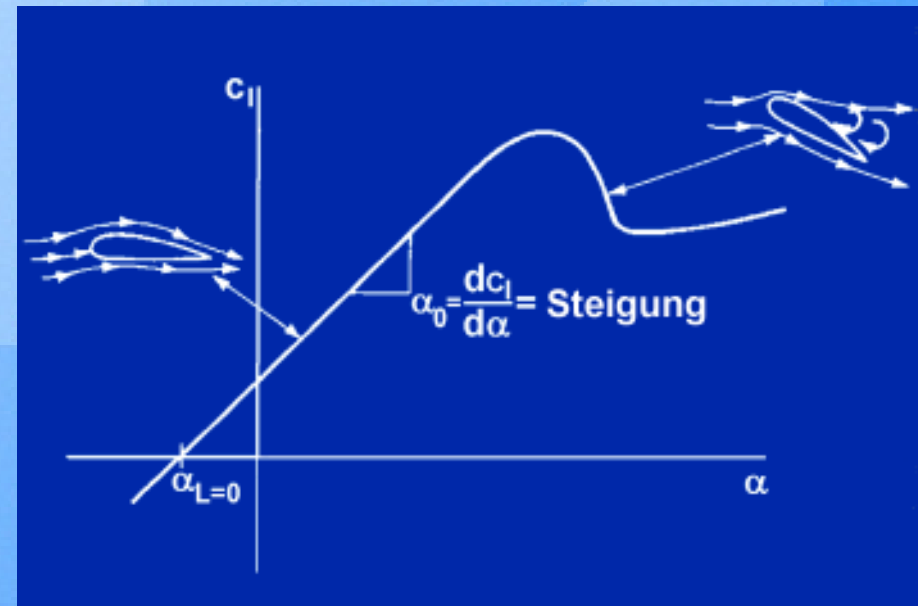
mit $\frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi$ folgt

$$c_l = 2\pi(\alpha - \alpha_{L=0})$$

→ Das Integral in Gleichung

$$c_l = 2\pi \left[\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz}{dx} (\cos(\theta_0) - 1) d\theta_0 \right]$$

ist der Null-Auftriebswinkel $\alpha_{L=0}$



c_l - α -Diagramm

Für den Momentenbeiwert ergibt sich die Gleichung

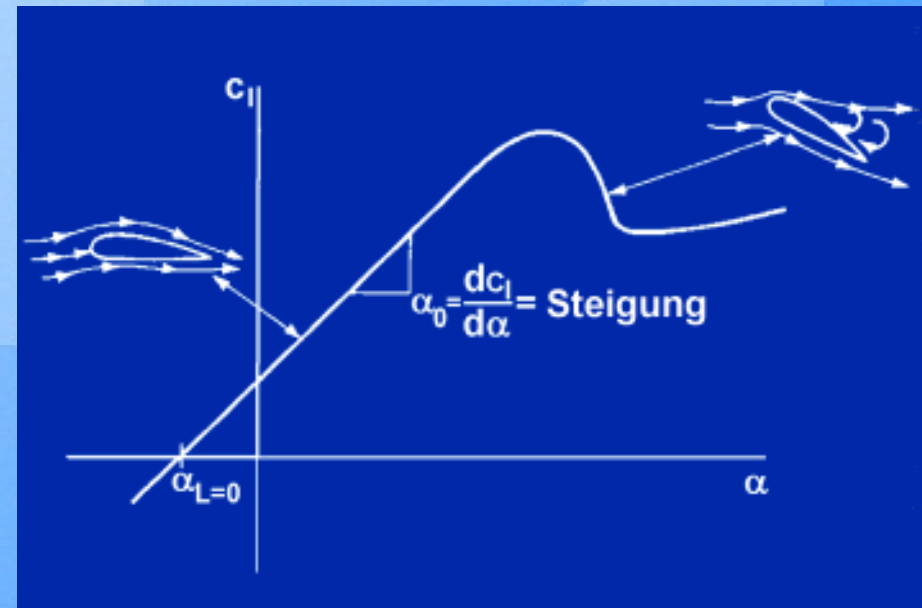
$$C_{m,LE} = -\frac{\pi}{2} \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right)$$

und umgeformt mit der Gleichung

$$C_l = \frac{L'}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c} = \pi (2A_0 + A_1)$$

folgt

$$C_{m,LE} = -\left(\frac{C_l}{4} + \frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) \right)$$



c_l - α -Diagramm

Der Momentenbeiwert für die c/4-Linie lautet

$$C_{m,c/4} = \frac{\pi}{4}(A_2 - A_1)$$

Aus der Gleichung

$$x_{cp} = -\frac{M'_{LE}}{L'} = -\frac{C_{m,LE}C}{C_l}$$






folgt die x-Koordinate des Druckpunktes für gewölbte Profile

$$x_{cp} = \frac{c}{4} \left[1 + \frac{\pi}{C_l} (A_1 - A_2) \right]$$



Anwendungen

Das Bild zeigt Beispiele für drei typische Skelettlinien

	Ebene Platte	Parabelskelett	S-Schlag Skelett
			
$\frac{y}{l}$	0	$\delta_1 \left(\frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right)$	$\left(\delta_1 + (\delta_2 - \delta_1) \frac{x}{l} \right) \left(\frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right)$
$\frac{dy}{dx}$	0	$-\delta_1 \cos \theta$	$\delta_1 \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right) + (\delta_2 - \delta_1) \left(2 \frac{x}{l} - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right)$ $= \frac{\delta_2 - \delta_1}{4} + \frac{3}{4} (\delta_1 - \delta_2) \cos^2 \theta$ $-\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \cos \theta$
A_0	α	α	$\alpha + \frac{\delta_2 - \delta_1}{8}$
A_1	0	δ_1	$\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$
A_2	0	0	$-\frac{3}{8} (\delta_1 - \delta_2)$
A_3, A_4, A_5	0	0	0
c_A	$2\pi\alpha$	$2\pi \left(\alpha + \frac{\delta_1}{2} \right)$	$2\pi \left(\alpha + \frac{\delta_1 + 3\delta_2}{8} \right)$
c_m	$-\frac{c_A}{4}$	$-\frac{\pi}{2} (\alpha + \delta_1) = -\frac{c_A}{4} - \pi \frac{\delta_1}{2}$	$-\frac{c_A}{4} - \frac{\pi}{32} (\delta_1 + 7\delta_2)$
$\alpha_{c_A=0}$	0	$-\frac{\delta_1}{2}$ 	$-\frac{\delta_1 + 3\delta_2}{8}$
α_{St}	0	0	$\frac{\delta_1 - \delta_2}{8}$
$\alpha_{c_m=0}$		$-\delta_1$ 	$-\frac{1}{16} (3\delta_1 + 13\delta_2)$

Panelverfahren (Exakte Singularitätenverfahren)

Bei den exakten Singularitätenverfahren sollen die Einschränkungen

- geringe Dicke
- geringe Wölbung

vermieden werden

Grundprinzip :

Die Konturstromlinie soll durch eine entsprechende Verteilung von Singularitäten modelliert werden

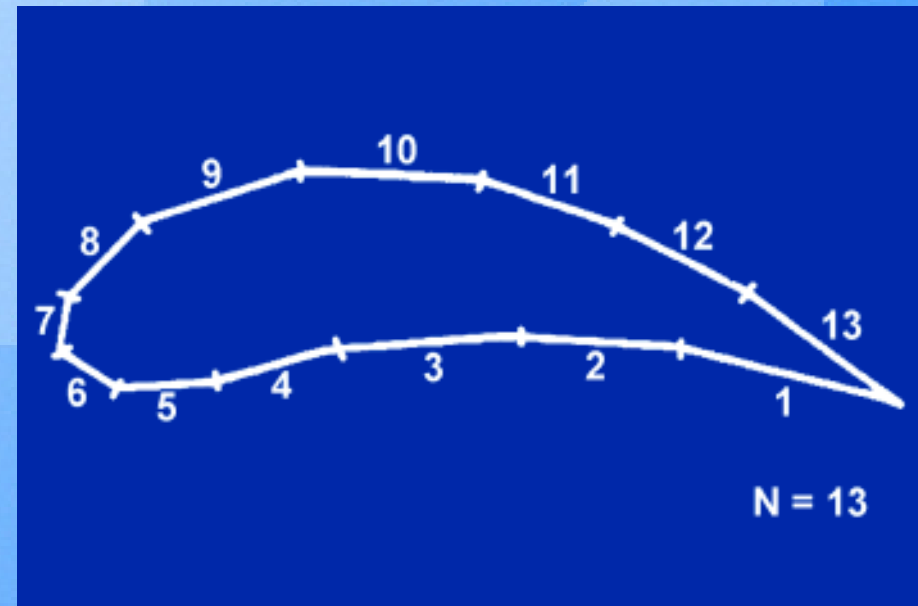
Änderung :

Die Singularitäten werden auf der Profilkontur angebracht



Vorgehensweise :

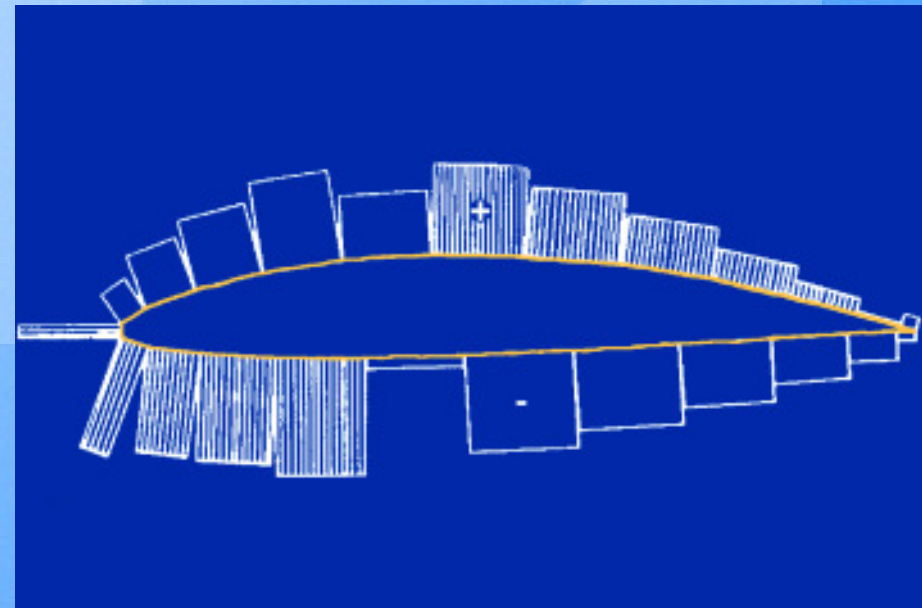
- Ersetzen der Profilkontur durch verschiedene Panel (in Gebieten starker Krümmung mehr Panel verwenden)



Profilkontur durch Panel ersetzt

Vorgehensweise :

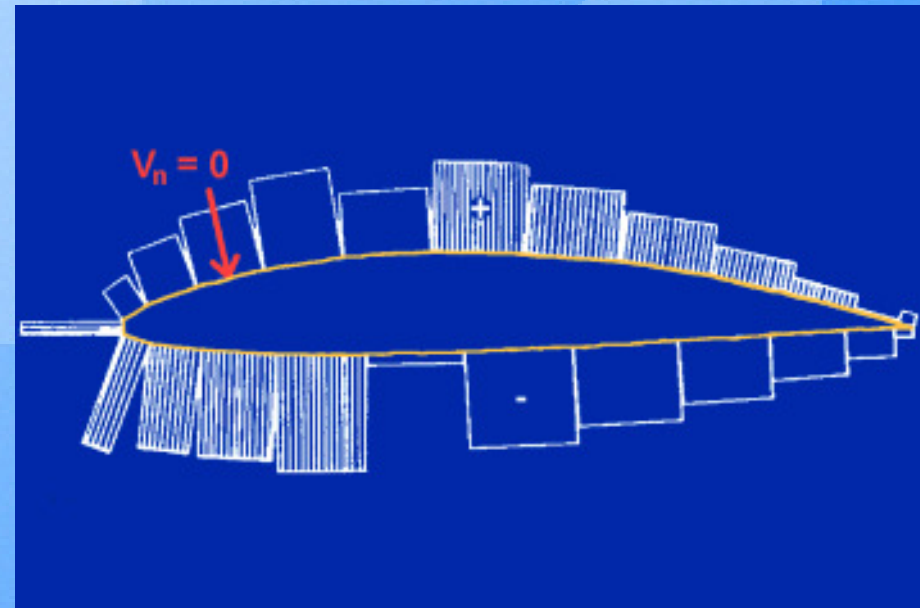
- Ersetzen der Profilkontur durch verschiedene Panel (in Gebieten starker Krümmung mehr Panel verwenden)
- Auf jedes Panel eine konstante Quellverteilung setzen



Konstante Quellen- und Senkenverteilung

Vorgehensweise :

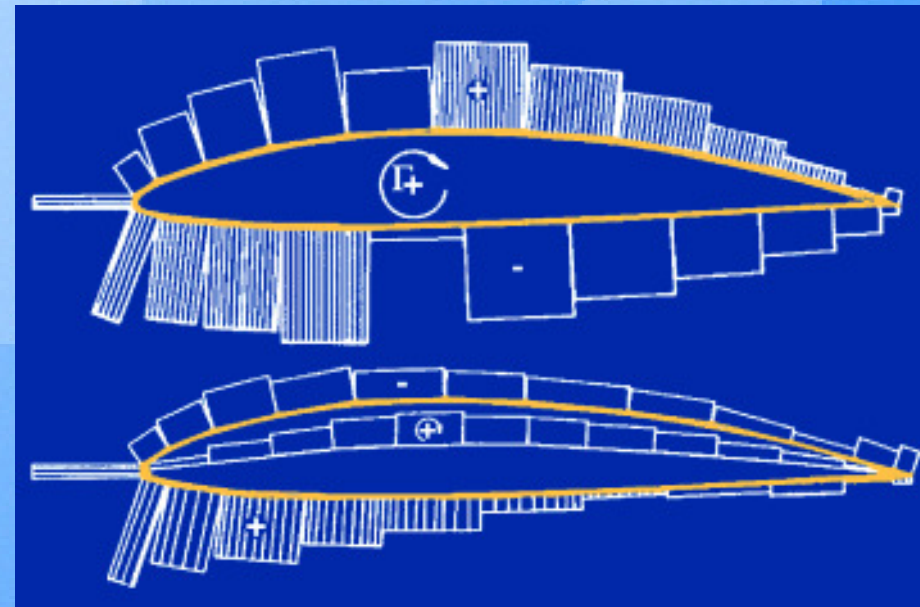
- Ersetzen der Profilkontur durch verschiedene Panel (in Gebieten starker Krümmung mehr Panel verwenden)
- Auf jedes Panel eine konstante Quellverteilung setzen
- Die kinematische Randbedingung muss jeweils in der Mitte der Panel erfüllt sein ($V_n = 0$)



Kinematische Randbedingung auf der Profilkontur

Vorgehensweise :

- Ersetzen der Profilkontur durch verschiedene Panel (in Gebieten starker Krümmung mehr Panel verwenden)
- Auf jedes Panel eine konstante Quellverteilung setzen
- Die kinematische Randbedingung muss jeweils in der Mitte der Panel erfüllt sein ($V_n = 0$)
- Auftrieb wird durch Anbringen eines Wirbels im Konturinneren erzeugt
- Alternativ lassen sich Wirbelpanel auf der Profelsehne verteilen



Alternative Verteilung von Wirbelpanel entlang der Skelettlinie

- Durch einen Wirbelpanel an der k-ten Stelle wird am Punkt P eine Geschwindigkeit bzw. ein Potential induziert

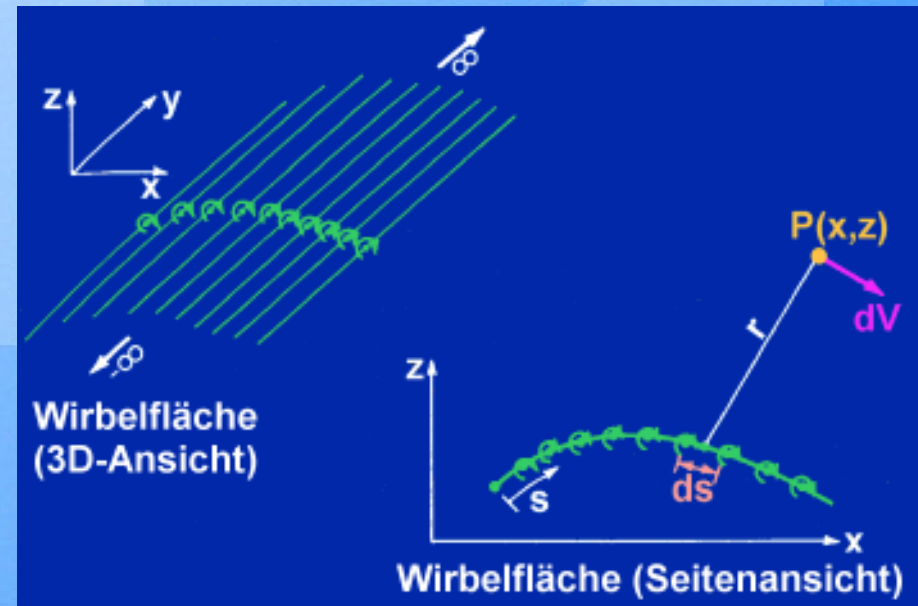
$$\Delta\phi_k = -\frac{1}{2\pi} \int \theta_{pk} \gamma_k ds_k$$

- Die Summe aller Wirbelpanel induziert dann am Punkt P das Potential

$$\phi(P) = \sum_{k=1}^n \phi_k = -\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{2\pi} \int \theta_{pk} ds_k$$

- Wird der beliebig wählbare Punkt P auf den Aufpunkt des i-ten Panels verschoben, lautet die Gleichung

$$\phi(x_i, y_i) = -\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{2\pi} \int \theta_{ik} ds_k$$



Wirbelpanel induzieren am Punkt P eine Geschwindigkeit dV

- Mit der Randbedingung

$$V_{\infty,n} + w'(s) = 0$$

und den Gleichungen

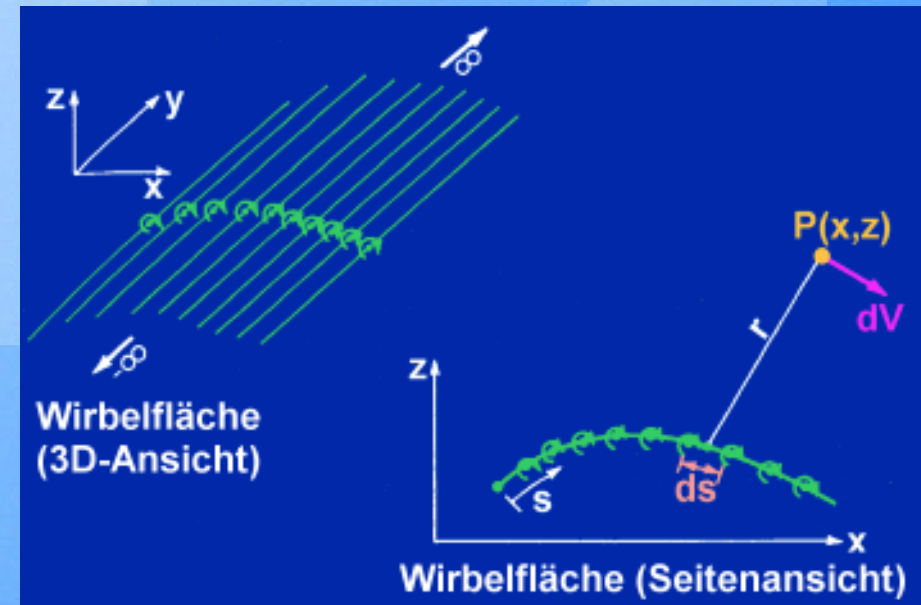
$$V_{\infty,n} = V_{\infty} \cos(\beta_i)$$

$$w'(s) = \frac{\partial}{\partial n_k} [\phi(x_i, y_i)]$$

folgt die Gleichung

$$V_{\infty} \cos(\beta_i) - \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{2\pi} \int_k \frac{\partial \theta_{ik}}{\partial n_k} ds_k = 0$$

HINWEIS : Die Richtung der ungestörten Anströmung und der Normalenvektor auf dem i-ten Panel schließen den Winkel β ein



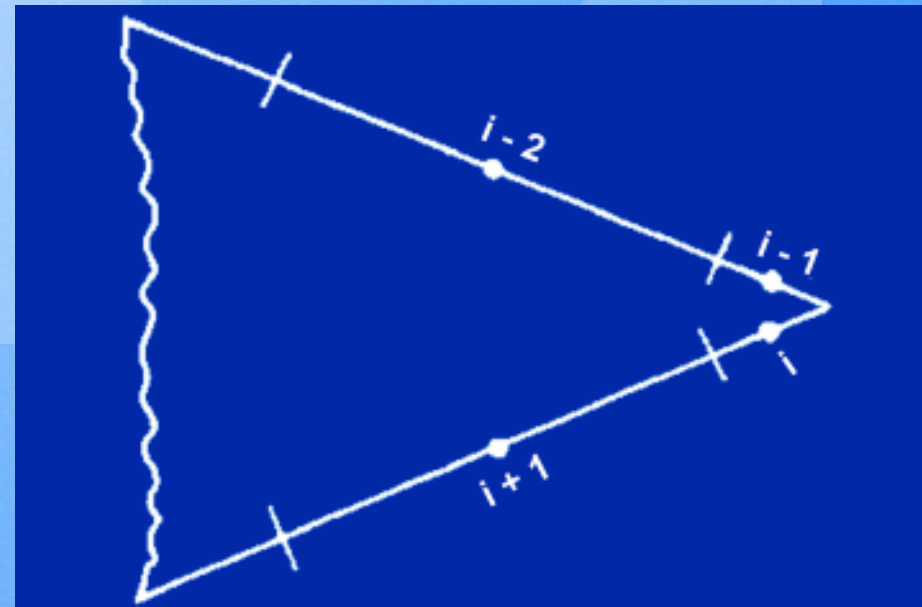
Wirbelpanel induzieren am Punkt P eine Geschwindigkeit dV

- Außerdem muss die Kuttasche Abflussbedingung an der Hinterkante (HK) erfüllt sein

$$\gamma(\text{HK}) = 0$$

- Numerische kann diese Bedingung angenähert werden, wenn die Punkte $(i - 1)$ und i nahe genug zusammen liegen und sich die Wirbelstärken der beiden Punkte zu Null addieren

$$\gamma_i = -\gamma_{i-1}$$



Panel an der Hinterkante

Zusammenfassung

- Profile lassen sich nach unterschiedlichen Typen einteilen
- Alle Kräfte und Momente an Profilen resultieren aus den Druck- und Schubspannungsverteilungen
- In der Aerodynamik werden meistens dimensionslose Beiwerte verwendet
- Im Druckpunkt wirkt kein aerodynamisches Moment
- Die Kuttasche Abflussbedingung fordert glattes Abströmen an der Hinterkante
- Beim Verdrängungsproblem werden Quellen und Senken auf die Profilsehne gelegt
- Beim Auftriebsproblem werden Wirbel auf die Skelettlinie gelegt
- Bei der Theorie dünner Profile liegen die Wirbel auf der Sehne
- Beim Panelverfahren werden unterschiedliche Verteilungen kombiniert

