5.Vorlesung

Aerodynamik I

(Grenzschichttheorie)

Prof. Dr.-Ing. C. Tropea

Dipl.-Ing. S. Eder / Dipl.-Ing. M. Weismüller

VWS (3+0)

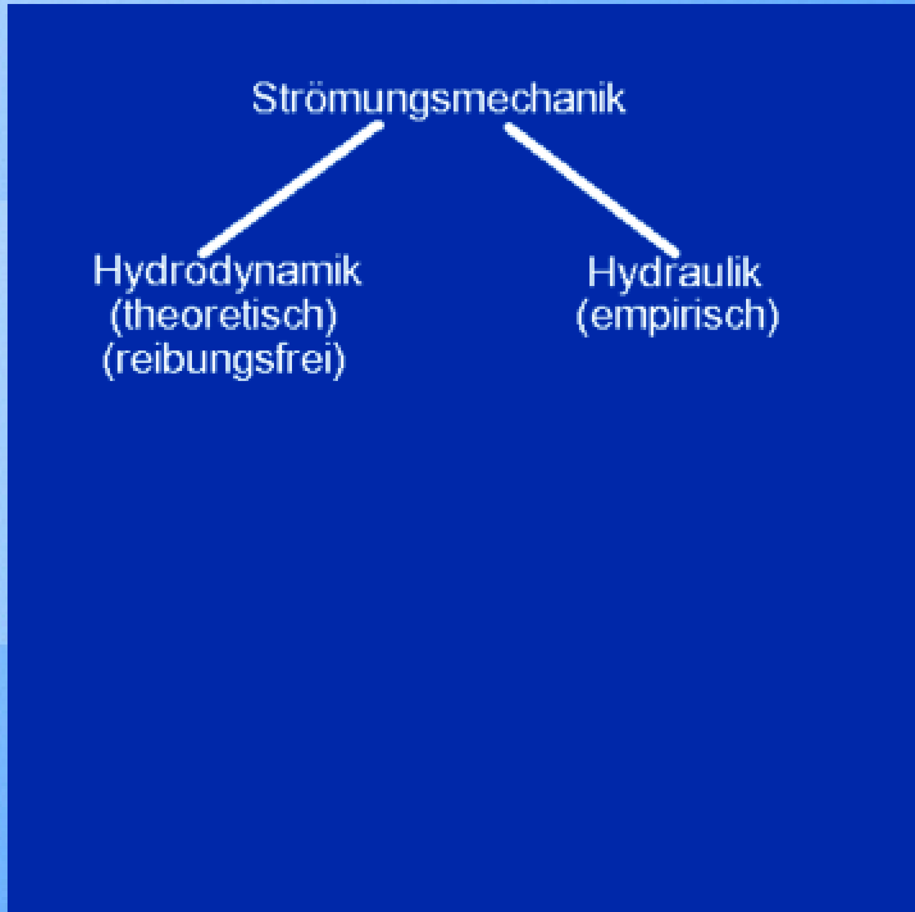
Wintersemester

Grenzschichttheorie :

- Einführung
- Grenzschichtgleichung
- Ablösung der Grenzschicht
- Laminare Grenzschichten
- Transition
- Turbulente Grenzschichten

Einführung

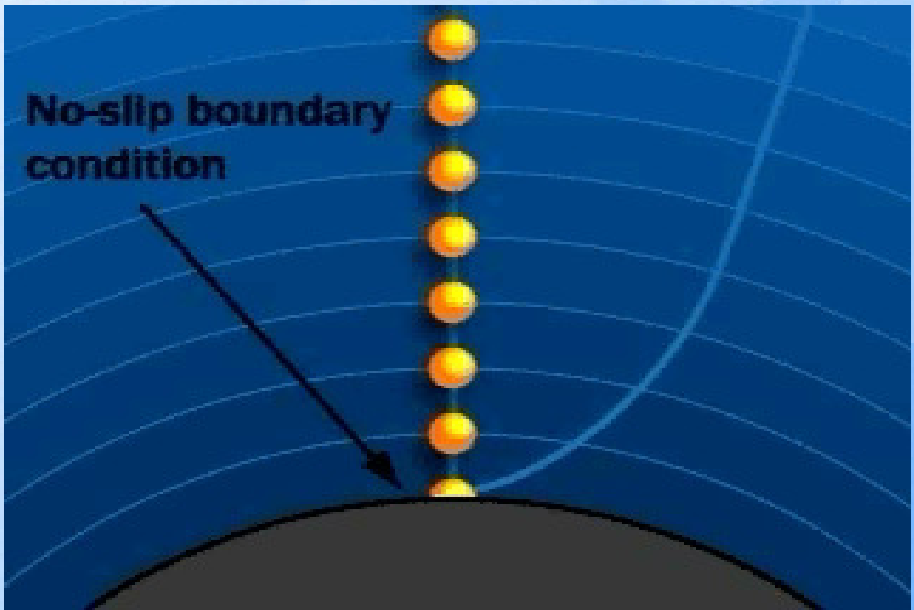
- Ende des 19.Jahrhunderts war die Strömungsmechanik in zwei Richtungen zerfallen :
    - Hydrodynamik
    - Hydraulik
- Hydrodynamik :
  Hat die Theorie der reibungsfreien Flüssig-keiten weit entwickelt, aber starker Widerspruch zum Experiment
- Hydraulik :
  Rein empirische Wissenschaft
- Problem :
  Vernachlässigung der Reibung



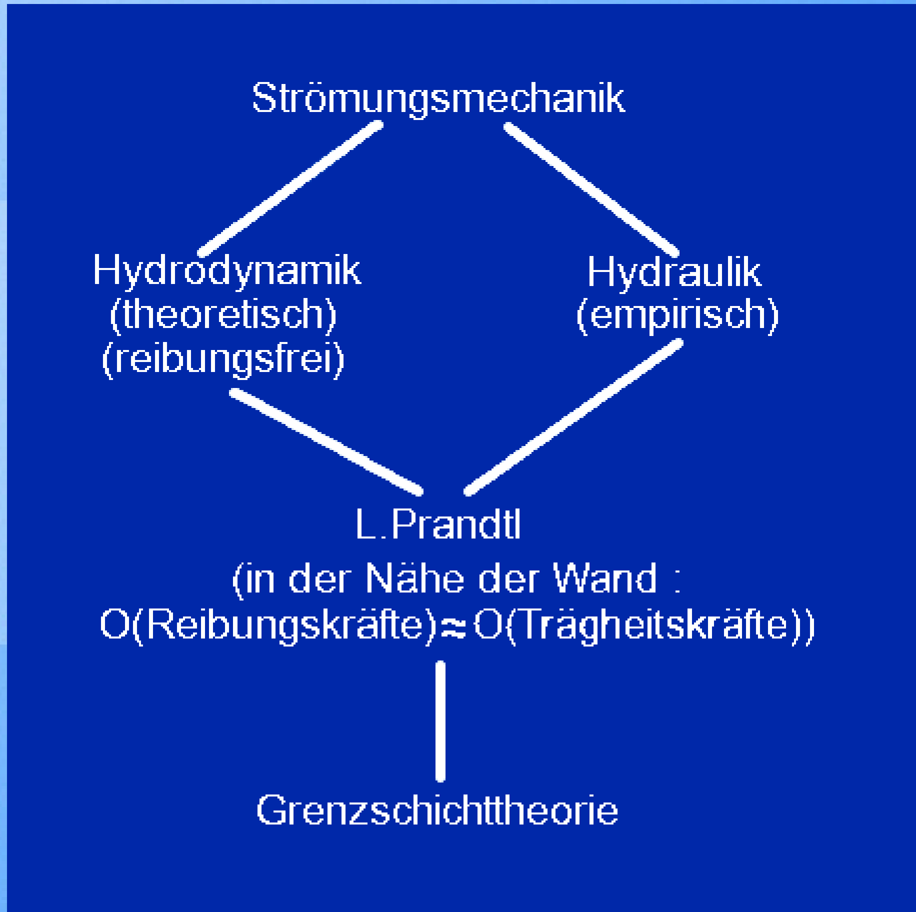
Geschichte der Strömungsmechanik

- 1904 führte Prandtl Beide wieder zusammen
- Er erkannte, dass in der Nähe einer Wand eine dünne Schicht existiert, in der die Reibungskräfte die gleiche Größenordnung wie die Trägheitskräfte haben

→ Grenzschichttheorie



Strömung an einer Wand (Grenzschichttheorie)



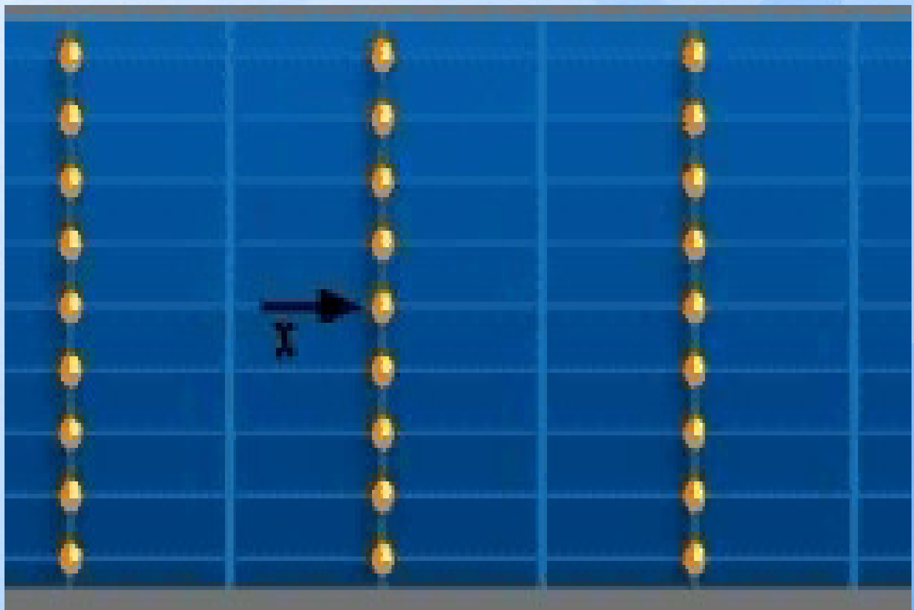
Geschichte der Strömungsmechanik

Was ist die Grenzschicht?

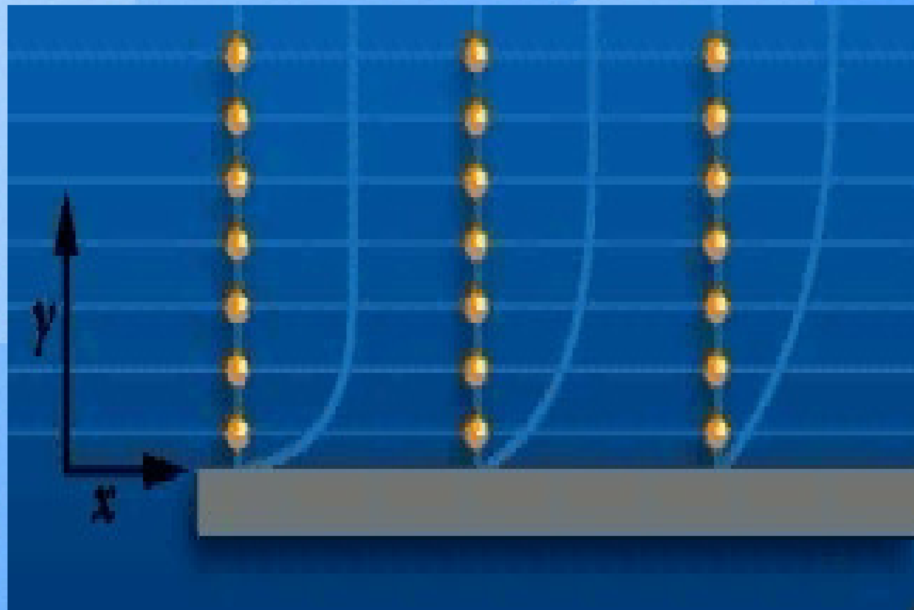
- Allgemein kann bei Strömungen mit großen Reynoldszahlen ($Re \to \infty$) die Viskosität vernachlässigt werden

- In der Natur gilt an der Wand die Haftbedingung $\vec{V} = 0$

$\to$ In Wandnähe sind auch bei diesen Strömungen die Reibungskräfte in der Größenordnung der Trägheitskräfte
O(Reibungskräfte) $\approx$ O(Trägheitskräfte)



Strömung an einer Wand ohne Haftbedingung



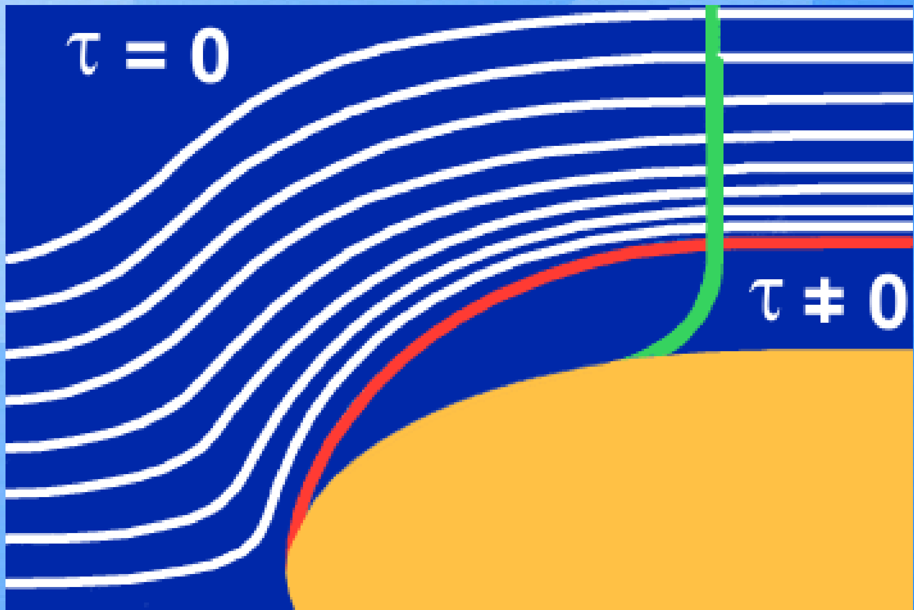
Strömung an einer Wand mit Haftbedingung

Was ist die Grenzschicht?

- Allgemein kann bei Strömungen mit großen Reynoldszahlen ($Re \to \infty$) die Viskosität vernachlässigt werden
- In der Natur gilt an der Wand die Haftbedingung $\vec{V} = 0$

$\rightarrow$ In Wandnähe sind auch bei diesen Strömungen die Reibungskräfte in der Größenordnung der Trägheitskräfte O(Reibungskräfte) $\approx$ O(Trägheitskräfte)

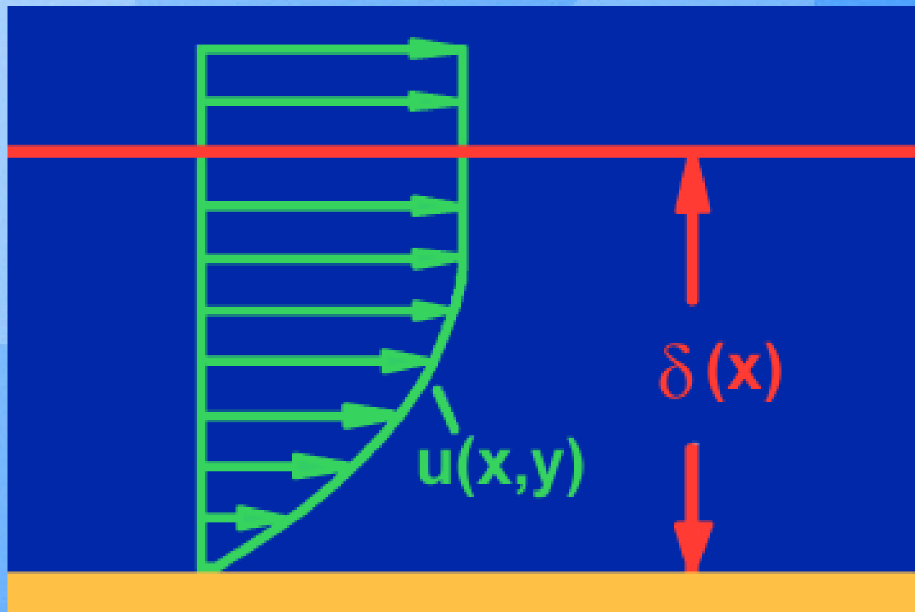
- Die dünne Schicht in Wandnähe in der die Reibung nicht vernachlässigt werden kann heißt Grenzschicht
- Außerhalb der Grenzschicht kann nahezu reibungsfrei gerechnet werden



Grenzschicht an einem Profil

- Die Dicke der Grenzschicht ist über die Stelle y definiert, an der die Geschwindigkeit 99% der freien Strömungsgeschwindigkeit erreicht hat

$$\delta = y\big|_{u=0,99u_0}$$



Grenzschichtdicke δ

- Die Dicke der Grenzschicht ist über die Stelle y definiert, an der die Geschwindigkeit 99% der freien Strömungsgeschwindigkeit erreicht hat

$$\delta = y\big|_{u=0{,}99u_0}$$

- Die Dicke der Grenzschicht hängt von der Geschwindigkeit der Strömung ab und es gilt

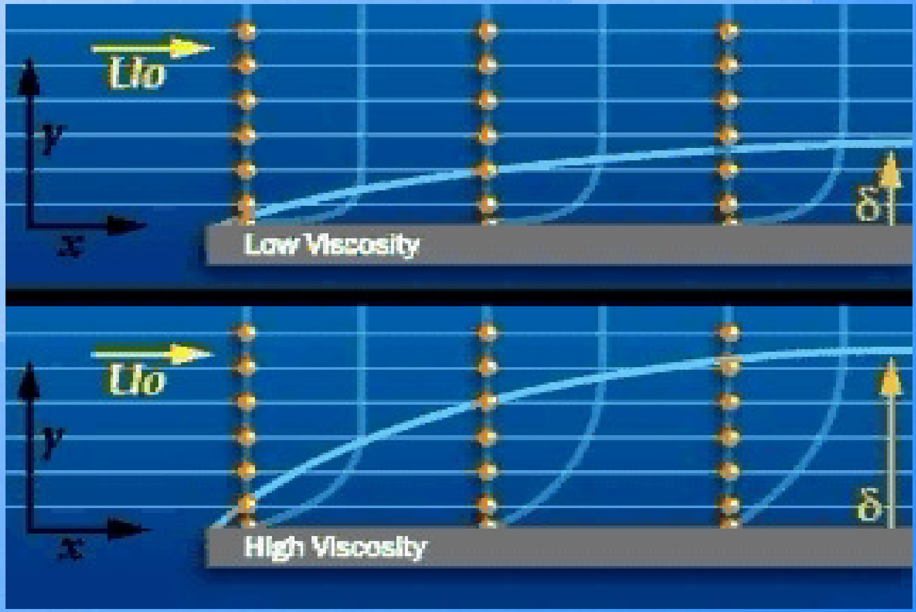
$$\frac{\delta}{l} = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$$

HINWEIS :
Gilt nur bei laminarer Grenzschicht

bzw. für große Reynoldszahlen $\delta << l$

- Die exakte Lösung von Blasius ergibt

$$\frac{\delta}{l} = \frac{5}{\sqrt{Re}}$$



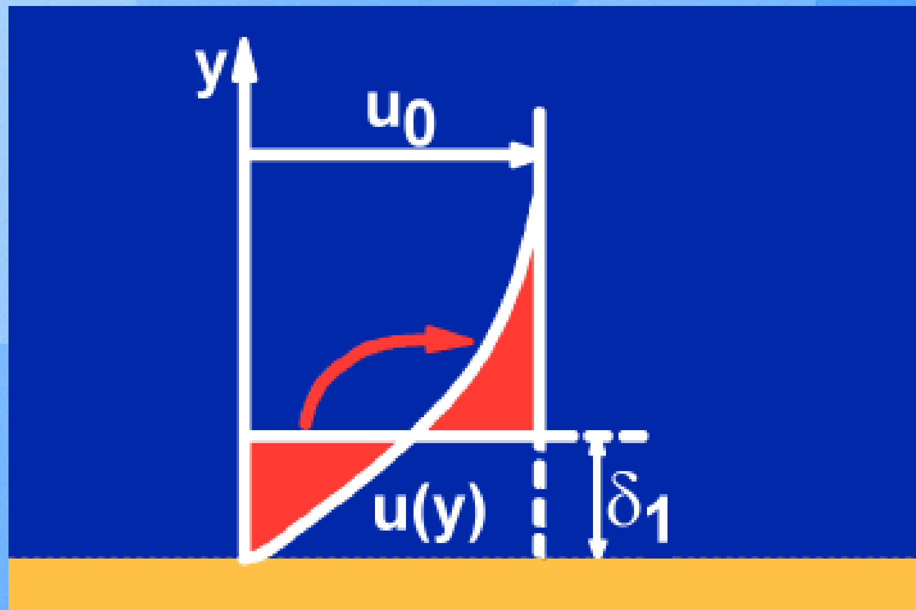
Ausbildung der Grenzschicht bei unterschiedlichen Reynoldszahlen

Weitere Kenngrößen der Grenzschicht

- Verdrängungsdicke
- Impulsverlustdicke
- Energieverlustdicke

Verdrängungsdicke

- Die Verdrängungsdicke ist so definiert, dass mit konstanter Geschwindigkeit u_0 der gleiche Volumenstrom erzielt wird.
- Hierzu müssen die roten Flächen gleich groß sein

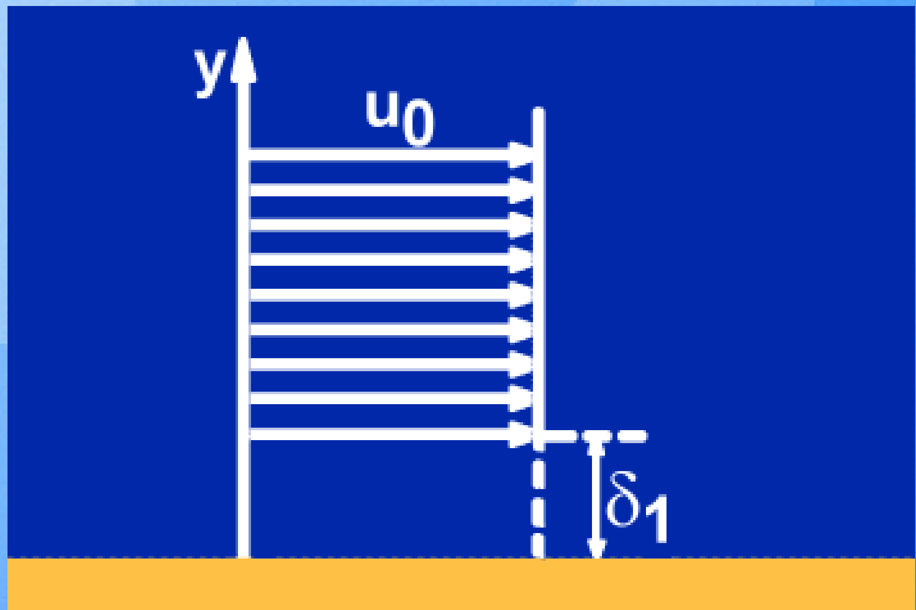


Grenzschichtprofil

Verdrängungsdicke

- Die Verdrängungsdicke ist so definiert, dass mit konstanter Geschwindigkeit u_0 der gleiche Volumenstrom erzielt wird.
- Hierzu müssen die roten Flächen gleich groß sein
- Der Körper wird dann um die Verdrängungsdicke δ_1 vergrößert und die Außenströmung kann Potentialtheoretisch gerechnet werden
- Die mathematische Definition der Verdrängungsdicke lautet

$$\delta_1 = \frac{1}{u_0} \int_{y=0}^{\infty} (u_0 - u)\,dy$$



Grenzschichtprofil

Impulsverlustdicke

- Die Impulsverlustdicke ist ähnlich der Verdrängungsdicke definiert

$$\delta_2 = \frac{1}{u_0^2} \int_{y=0}^{\infty} u(u_0 - u)dy$$

- Die Impulsverlustdicke gibt die Höhe des Gebietes an, das aus einer reibungsfreien Strömung entfernt werden müsste, um den gleichen Impulsverlust zu erhalten

Energieverlustdicke

- Die Definition der Energieverlustdicke lautet

$$\delta_3 = \frac{1}{u_0^3} \int_{y=0}^{\infty} u(u_0^2 - u^2)\,dy$$

- Die Energieverlustdicke gibt die Höhe des Gebietes an, das aus einer reibungsfreien Strömung entfernt werden müsste, um den gleichen Energieverlust zu erhalten

Zusammenfassung

Grenzschichtdicke	$\delta = y\big\rvert_{u=0{,}99u_0}$
Verdrängungsdicke	$\delta_1 = \frac{1}{u_0}\int\limits_{y=0}^{\infty}(u_0 - u)dy$
Impulsverlustdicke	$\delta_2 = \frac{1}{u_0^2}\int\limits_{y=0}^{\infty}u(u_0 - u)dy$
Energieverlustdicke	$\delta_3 = \frac{1}{u_0^3}\int\limits_{y=0}^{\infty}u(u_0^2 - u^2)dy$
Formfaktor	$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$

Aufstellen der Grenzschichtgleichung

Die Strömung wird in zwei Gebiete aufgeteilt :

1. Grenzschicht :

   - Großer Geschwindigkeitsgradient $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ normal zur Wand

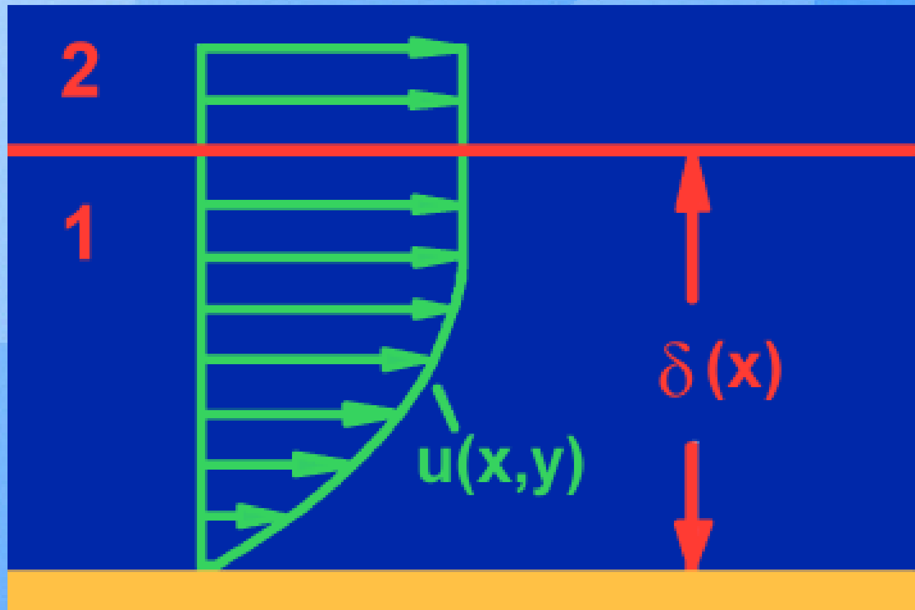
   → Auch geringe Viskosität μ hat hier große Auswirkungen, da gilt

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

2. Äußere Strömung :

   - Sehr kleine Geschwindigkeitsgradienten

   → Die Viskosität hat hier keine Bedeutung



Unterteilung der Strömung

- Für inkompressible Strömungen lauten die Navier-Stokes-Gleichungen (zweidimensional und ohne Volumenkräfte)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

- Für inkompressible Strömungen lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- Mit den Abschätzungen

$$\varepsilon = O(\varepsilon_\infty) \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = O\left(\frac{\varepsilon_\infty}{l}\right) \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = O\left(\frac{\varepsilon_\infty}{\delta}\right) \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = O\left(\frac{\varepsilon u_\infty}{l}\right)$$

ergibt das für u

HINWEIS : ε ist eine allgemeine Variable, die z.B. durch u oder v ersetzt werden kann

$$u = O(u_\infty)$$

und mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow O\left(\frac{u_\infty}{l}\right) = O\left(\frac{v_\infty}{\delta}\right)$$

für v

$$v = O(v_\infty) = O\left(\frac{u_\infty \delta}{l}\right)$$

- Der Druck wird mit der Bernoullischen Gleichung zu

$$p = O\left(\rho u_\infty^2\right)$$

abgeschätzt

- Mit den Abschätzungen folgt für die Terme der x-Komponente der Navier-Stokes-Gleichungen

Term	$\frac{\partial u}{\partial t}$	$u\frac{\partial u}{\partial x}$	$v\frac{\partial u}{\partial y}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$	$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
Abschätzung	$\frac{u_\infty^2}{l}$	$\frac{u_\infty^2}{l}$	$\frac{u_\infty^2}{l}$	$\frac{u_\infty^2}{l}$	$\nu\frac{u_\infty}{l^2}$	$\nu\frac{u_\infty}{\delta^2}$
Normierung	1	1	1	1	$\frac{1}{Re}$	$\frac{1}{Re}\frac{l^2}{\delta^2}$

- Der letzte Term $\frac{1}{Re}\frac{l^2}{\delta^2}$ in der Tabelle wird mit $\frac{\delta}{l} = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$ zu O(1)

- Für die y-Komponente der Navier-Stokes-Gleichungen gilt

Term	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$u\frac{\partial v}{\partial x}$	$v\frac{\partial v}{\partial y}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$	$\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$	$\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$
Abschätzung	$\frac{u_\infty^2\delta}{l^2}$	$\frac{u_\infty^2\delta}{l^2}$	$\frac{u_\infty^2\delta}{l^2}$	$\frac{u_\infty^2}{l}$	$\nu\frac{u_\infty\delta}{l^3}$	$\nu\frac{u_\infty}{l\delta}$
Normierung	$\frac{\delta^2}{l^2}$	$\frac{\delta^2}{l^2}$	$\frac{\delta^2}{l^2}$	1	$\frac{1}{Re}\frac{\delta^2}{l^2}$	$\frac{1}{Re}$

- Es gilt $\frac{\delta}{l} = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$

- Wird für beide Komponenten der Navier-Stokes-Gleichungen der Grenzfall Re $\rightarrow \infty$ betrachtet, dann folgen daraus die Prandtlschen Grenzschichtgleichungen

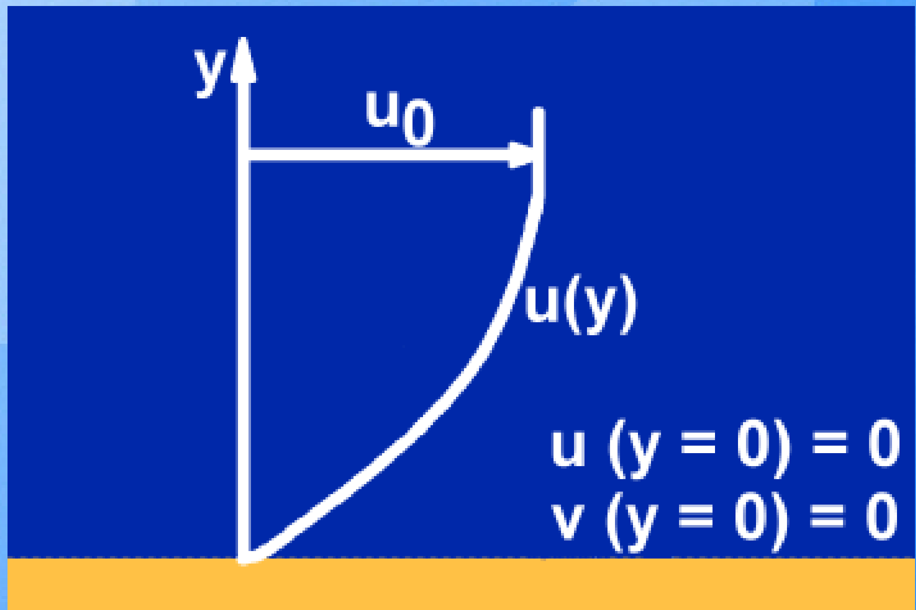
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- Die Randbedingungen zu den Prandtlschen Grenzschichtgleichungen lauten

$$u(y=0)=0 \qquad v(y=0)=0 \qquad u(y\to\infty)=u_o(x,t)$$



Grenzschicht

- Die Randbedingungen zu den Prandtlschen Grenzschichtgleichungen lauten

$$u(y=0)=0 \qquad v(y=0)=0 \qquad u(y\to\infty)=u_o(x,t)$$

- Die Prandtlschen Grenzschichtgleichungen sagen aus, dass der Druck senkrecht zur Wand konstant bleibt

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}$$

$\rightarrow$ Der Grenzschicht wird der Druck der reibungsfreien Außenströmung aufgeprägt

- Die Randbedingungen zu den Prandtlschen Grenzschichtgleichungen lauten

$$u(y=0)=0 \qquad v(y=0)=0 \qquad u(y\to\infty)=u_o(x,t)$$

- Die Prandtlschen Grenzschichtgleichungen sagen aus, dass der Druck senkrecht zur Wand konstant bleibt

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}$$

→ Der Grenzschicht wird der Druck der reibungsfreien Außenströmung aufgeprägt

- Aus der Euler-Gleichung folgt, dass der Druckgradient durch die Geschwindigkeitsverteilung in der Außenströmung ersetzt werden kann

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=u_0\frac{du_0}{dx}$$

HINWEIS : Wegen - $\delta p/\delta y=0$, kann $\delta p/\delta x$ durch dp/dx ersetzt werden

- Grenzschichtgleichungen sind vom parabolischen Typ

$\rightarrow$ Lösung ist ein Anfangswertproblem

$\rightarrow$ Schwierigkeiten in Gebieten, in denen sich die Strömung umkehrt (Grenzschichtgleichungen werden in Ablösegebieten singulär (Goldstein-Singularität))

$\rightarrow$ Nicht ohne weiteres möglich mit bekanntem Druckverlauf dp/dx der Außenströmung über die Ablösung hinweg die Grenzschicht zu berechnen

$\rightarrow$ Den Verlauf anderer Größen vorgeben (z.B. Wandschubspannungen) und den Druckverlauf der Außenströmung hieraus berechnen (inverse Grenzschichtverfahren)

Beispiel zur mathematischen Bedeutung der Grenzschichtgleichung :

- Lineare gewöhnliche differentielle Gleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\varepsilon y'' + y' + ky = 0 \qquad 0 < x < 1$$

- Randbedingungen :

  $y = 0$ für $x = 0$

  $y = 1$ für $x = 1$

- Annahme :

  $\varepsilon \ll 1$ (z.B. die Viskosität in einer Strömung)

- Vorgehensweise :

  - Da ε sehr klein ist, vereinfacht sich

$$\varepsilon y'' + y' + ky = 0$$

zu

$$y' + ky = 0$$

und die Lösung der Gleichung lautet

$$y = ae^{-kx}$$

HINWEIS : a ist eine Konstante

  - Danach wird die Lösung mit sukzessiver Approximation (ε^n) verfeinert

  - Um die Randbedingung y = 1 für x = 1 zu erfüllen gilt

$$y = e^{k(x-1)}$$

- Für die Randbedingung $y = 0$ für $x = 0$ gilt

$$y = e^{k(x-1)}$$

nicht, aber eine weitere Verfeinerung ist nicht mehr möglich

- Das Problem liegt darin, dass sich in der Nähe von $x = 0$ y sehr schnell ändern muss (von ca. e^k auf Null)

$\rightarrow$ Auch $\varepsilon y''$ ist groß, obwohl ε selber klein ist.

- Ebenso ist y' groß gegenüber ky und aus Gleichung

$$\varepsilon y'' + y' + ky = 0$$

wird

$$\varepsilon y'' + y'$$

bzw.

$$\varepsilon y' + y = c$$

- Aus

$$\varepsilon y' + y = c$$

wird

$$\varepsilon y' + (y - c)$$

und gelöst

$$y - c = A e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

HINWEIS : A ist eine Konstante

- Für die Randbedingung y = 0 für x = 0 folgt

$$y = c\left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right)$$

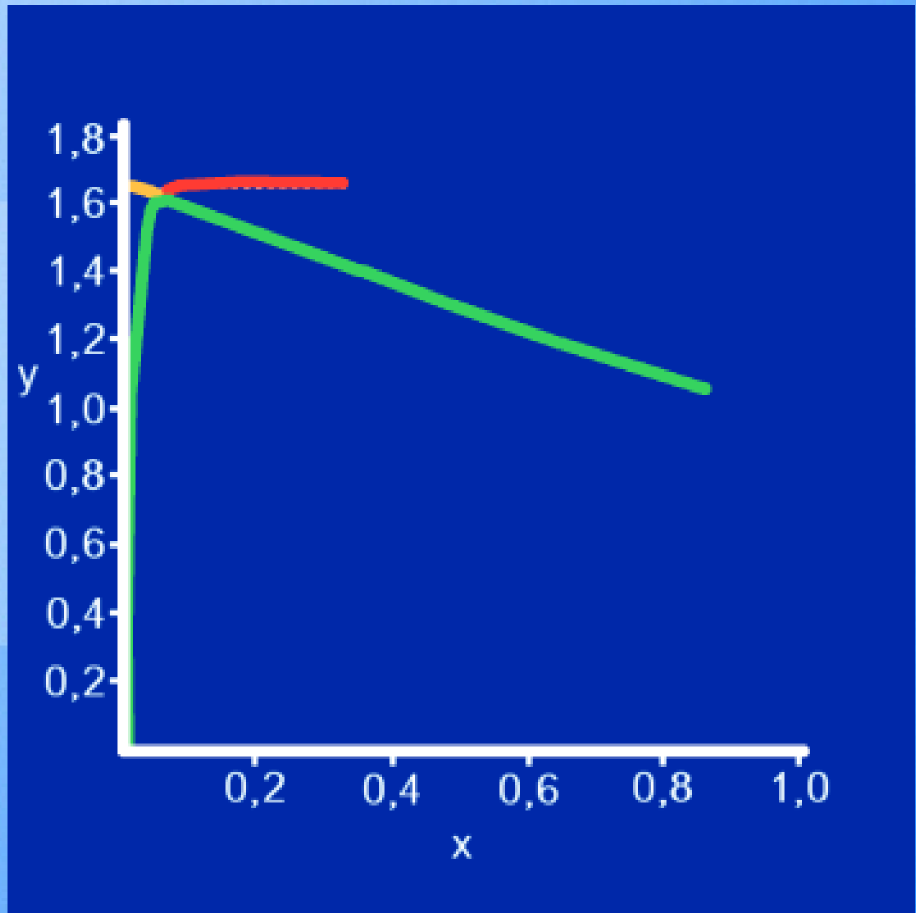
- Die Lösung

$$y = c\left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right)$$

ist nur für eine „Grenzschicht“ passend, in der sich y sehr schnell mit x ändert

- Wird $c = e^k$ gesetzt, so gehen die zwei Lösungen ineinander über

- Prandtl hat die Vorgehensweise mit der nichtlinearen Feld-beschreibung von Strömungen genutzt, um eine Grenzschicht zu definieren



Grenzschicht

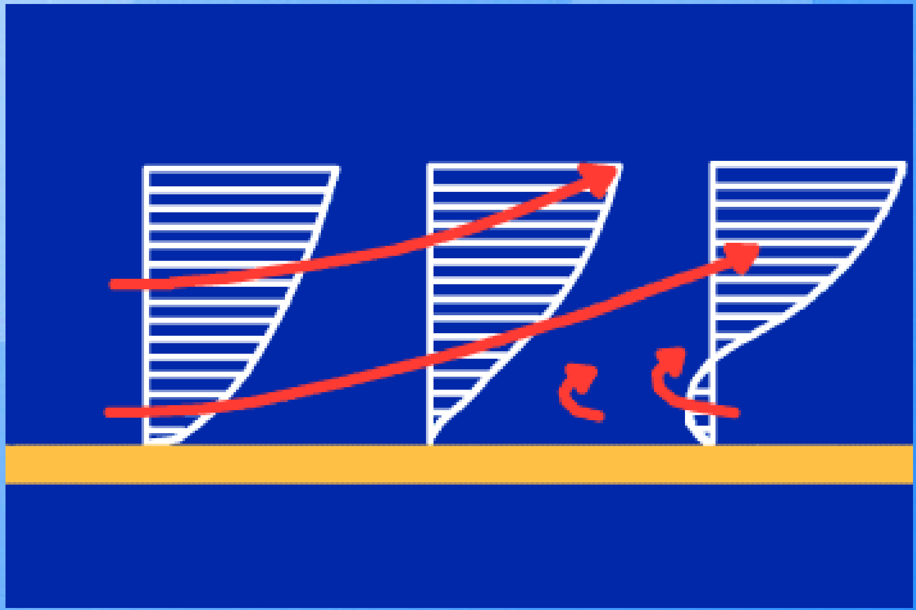
5. Vorlesung Aerodynamik I

Ablösen der Grenzschicht

- Besteht ein Druckanstieg in Strömungsrichtung wird die Strömung verzögert

$\rightarrow$ Die wandnahen Fluidelemente werden so stark gebremst, dass sie ihre Bewegungsrichtung umkehren

- Dieser Vorgang wird als Ablösen der Grenzschicht bezeichnet



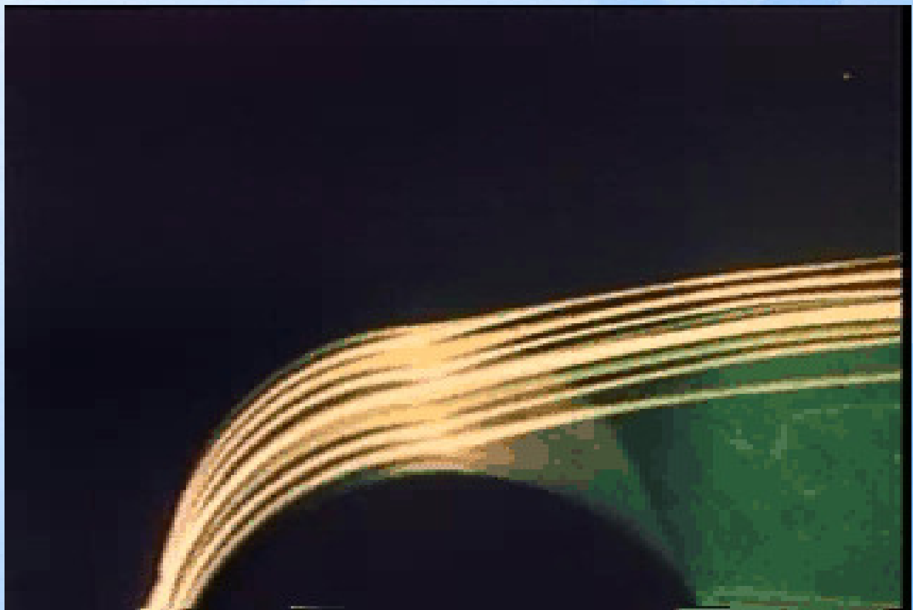
Ablösen der Grenzschicht

Ablösen der Grenzschicht

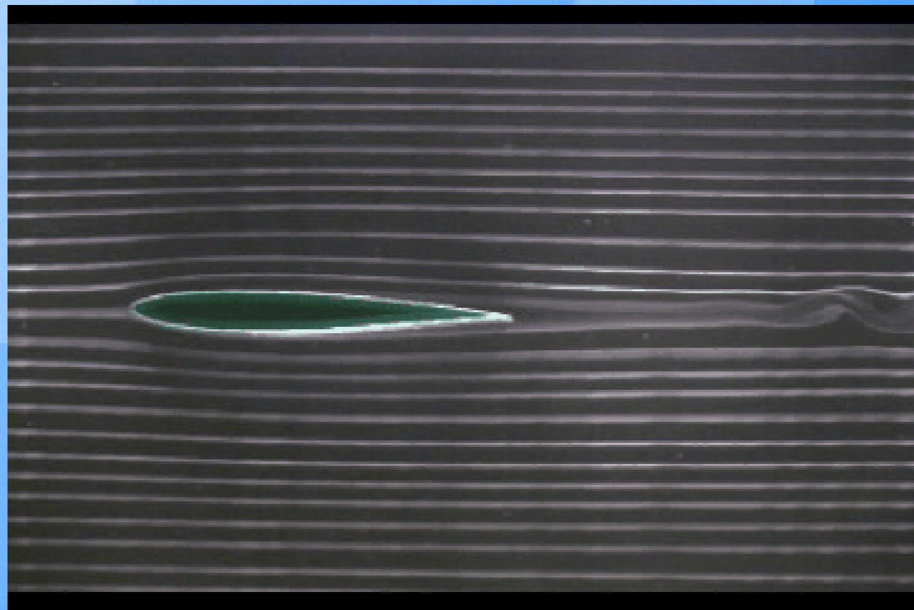
- Besteht ein Druckanstieg in Strömungsrichtung wird die Strömung verzögert

$\rightarrow$ Die wandnahen Fluidelemente werden so stark gebremst, dass sie ihre Bewegungsrichtung umkehren

- Dieser Vorgang wird als Ablösen der Grenzschicht bezeichnet



Ablösen der Grenzschicht



Ablösen der Grenzschicht

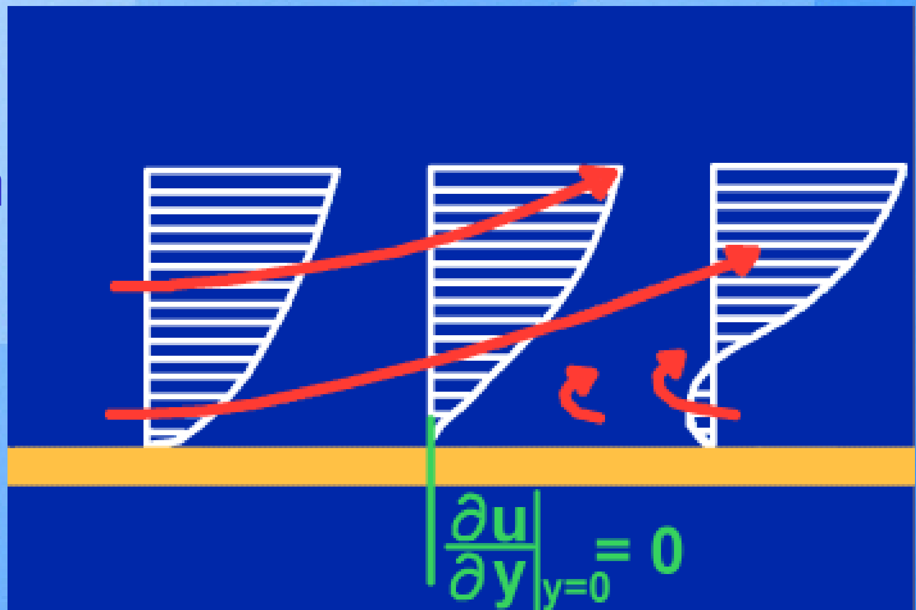
- Als Ablösepunkt ist der Punkt definiert, an dem das wandnahe Fluid gerade zum Stillstand gekommen ist

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$$

- Der Zusammenhang zwischen einem positiven Druckgradienten und dem Auftreten einer Ablösung lässt sich mit der Grenzschichtgleichung zeigen

- Für y=0 gilt

$$\frac{dp}{dx} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



Ablösen der Grenzschicht

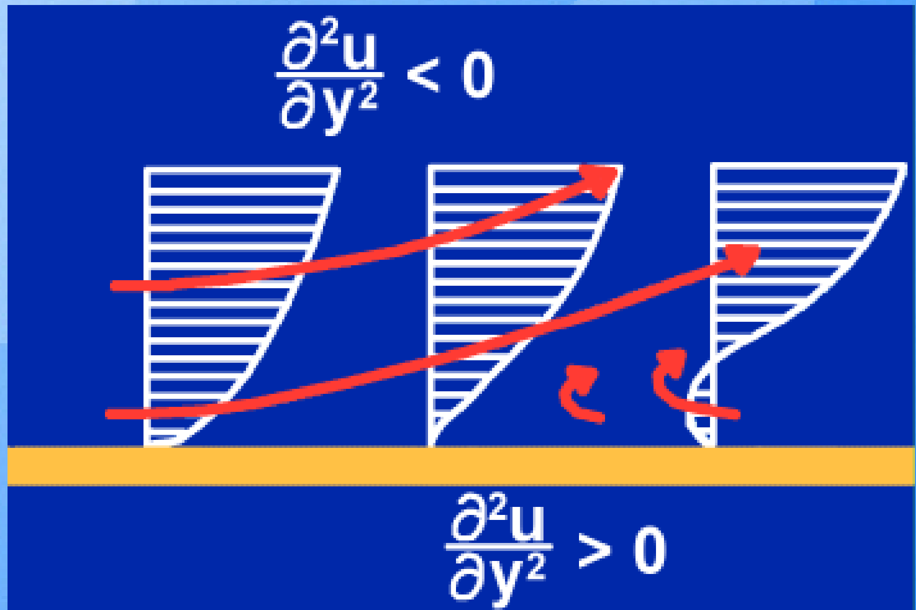
- In einer abgelösten Grenzschicht gilt :

- Wand : $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$

- Grenzschichtrand : $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$

→ Wendepunkt im Geschwindigkeitsprofil

→ Ablösung nur bei Druckanstieg



Ablösen der Grenzschicht

Plattengrenzschicht

- Anströmung mit V_∞
- kein Druckgradient vorhanden $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$

- Für den Impulssatz und die Kontinuitätsgleichung folgt damit :

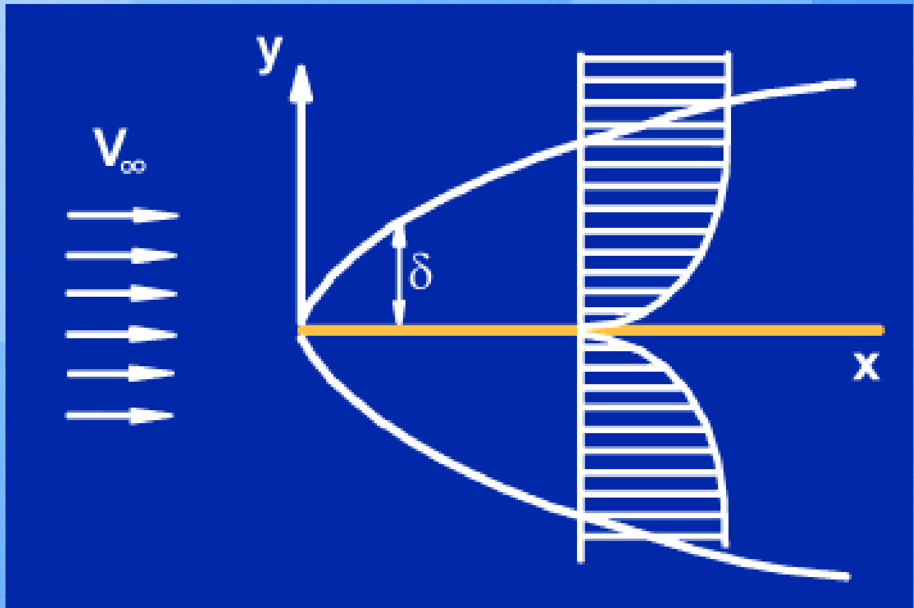
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- Die Randbedingungen lauten :

$$y = 0 : u = v = 0$$

$$y \to \infty : u = V_\infty$$



Geschwindigkeitsprofile im realen und transformierten Raum

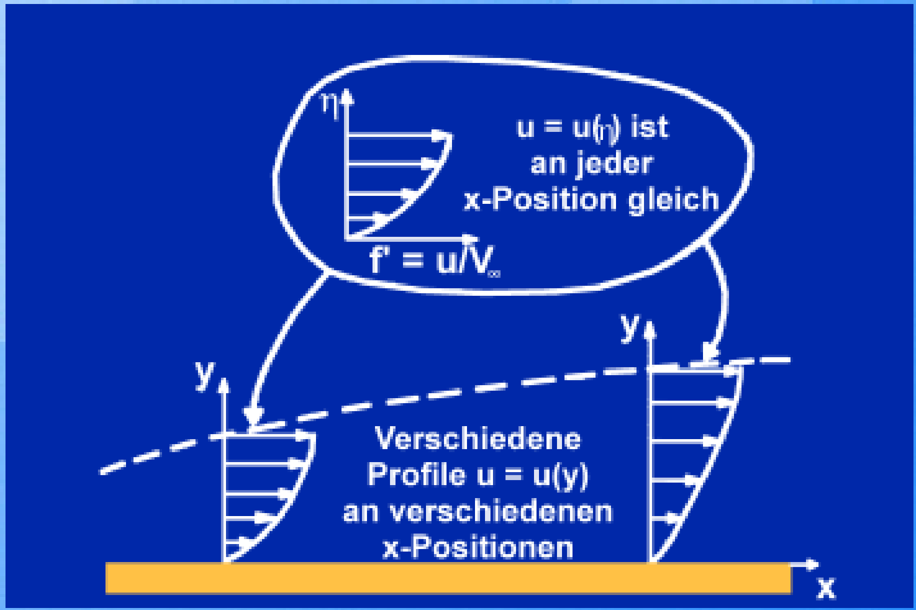
- Es wird die Annahme getroffen, dass die Geschwindigkeitsprofile zueinander ähnlich sind

→ Geeigneten Maßstabsfaktor für u und y einführen

- Geeignet hierfür sind V_∞ und $\delta(x)$

$$\frac{u}{V_\infty} = \varphi\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)$$

- Die Funktion muss für alle Werte von x gleich sein (ähnliche Geschwindigkeitsprofile)



Geschwindigkeitsprofile im realen und transformierten Raum

- Für den dimensionslosen Wandabstand wird die neue Koordinate

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

eingeführt

- Mit der schon gemachten Annahme

$$\delta = O\left(\sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}}\right)$$

folgt

$$\eta = y\sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}}$$

- Die Kontinuitätsgleichung wird durch Einführen einer Stromfunktion

$$\psi = \sqrt{\nu x V_\infty}\, f(\eta)$$

HINWEIS : f(η) wird dimensionslose Stromfunktion genannt

identisch erfüllt

- Für die Geschwindigkeitskomponenten folgt

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = V_\infty f'$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu V_\infty}{x}}(\eta f' - f)$$

HINWEIS : f‘ ist die Ableitung nach η

- Bilden der weiteren Glieder für die Impulsgleichung und Einsetzen führt zu

$$-\frac{V_\infty^2}{2x}\eta f' f'' + \frac{V_\infty^2}{2x}\left(\eta f' - f\right) f'' = \nu \frac{V_\infty}{x\nu} f'''$$

- Vereinfachen ergibt eine gewöhnliche DGL, die Blasius-Gleichung genannt wird

$$ff'' + 2f''' = 0$$

- Aus numerischen Lösung der Blasius-Gleichung folgt

$$\tau = 0{,}332\sqrt{\frac{\rho\mu V_\infty^3}{x}}$$

$$c_f = \frac{2\tau}{\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{0{,}664}{\sqrt{Re_x}}$$

HINWEIS : Re_x ist die lokale Reynoldszahl

- Wird τ über die gesamte Plattenlänge von x = 0 bis x = c integriert folgt

$$C_f = \frac{1}{c}\int_0^c c_f\,dx = \frac{1{,}328}{\sqrt{Re_c}}$$

HINWEIS : Re_c ist die auf die Plattenlänge bezogene Reynoldszahl

- Eine Verallgemeinerung des Blasiusansatzes mit

$$u(x) = Cx^m$$

und

$$\delta(x) = O\left(\sqrt{\frac{\nu \cdot x}{u(x)}}\right) = \sqrt{\frac{\nu}{C}} x^{\frac{1-m}{2}}$$

führt zur Stromfunktion

$$\psi = u \cdot \delta \cdot f(\eta) = \sqrt{C\nu}\, x^{\frac{m+1}{2}} f(\eta)$$

- Eingesetzt in die Impulsgleichung folgt die Falkner-Skan-Gleichung

$$f''' + \frac{m+1}{2} ff'' + m\left(1 - f'^2\right) = 0$$

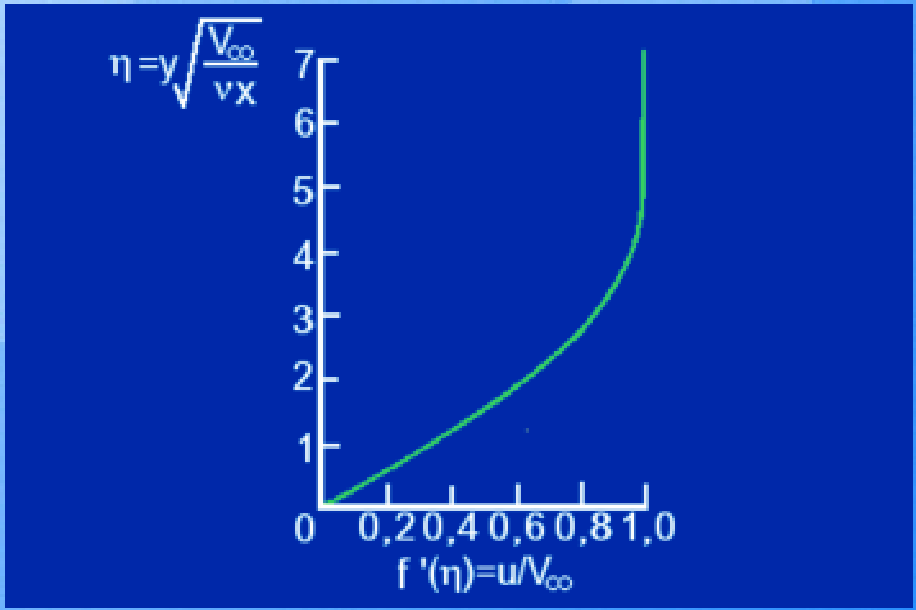
- Für die ebene Parallelströmung gilt m = 0 und es ergibt sich wieder die Blasius-Gleichung Als Spezialfall der Falkner-Skan-Gleichung

$$ff'' + 2f''' = 0$$

- Die Randbedingungen lauten

$$\eta = 0 \ \text{ für } \ f = 0,\ f' = 0$$

$$\eta \to \infty \quad \text{für} \ \ f' = 1$$



Geschwindigkeitsprofile für eine flache Platte (Lösung der Blasius-Gleichung)

Laminare Grenzschichten

- Schwierigkeiten beim Lösen der Grenzschichtgleichungen

→ Gleichung nicht an jeder Stelle der Strömung lösen, sondern integral über die Grenzschicht

- Im einfachsten Fall wird die x-Komponente der Prandtlschen Grenzschichtgleichungen über δ integriert

→ Gewöhnliche Differentialgleichung

Impulssatz

- Mit der Beziehung

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = V\frac{dV}{dx}$$

folgt für die integrierte x-Komponente der Prandtlschen Grenzschichtgleichungen

$$\int_0^\delta \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - V\frac{dV}{dx} \right) dy = \int_0^\delta \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$$

- Die rechte Seite führt auf die Wandschubspannungen

$$\int_0^\delta \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \nu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_0^\delta = -\frac{1}{\rho}\tau_w$$

- Durch Anwendung der Kontinuitätsgleichung kann die Geschwindigkeit v ersetzt werden

$$v = -\int_0^y \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy$$

und es folgt

$$\int_0^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy - V \frac{dV}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho}$$

- Für das zweite Glied liefert die partielle Integration

$$\int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \right) dy = V \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

- Und es folgt

$$\int_0^h \left(2u\frac{\partial u}{\partial x} - V\frac{\partial u}{\partial x} - V\frac{dV}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho}$$

- Umformen der Gleichung führt zu

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}\left[u(V-u)\right]dy + \frac{dV}{dx}\int_0^h (V-u)dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

- Für die Gleichung

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}[u(V-u)]dy + \frac{dV}{dx}\int_0^h (V-u)dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

gilt :

- $h \to \infty$ (außerhalb der Grenzschicht verschwindet der Integrand)
- Differentiation nach x und Integration nach y werden vertauscht (die obere Grenze h ist von x unabhängig)

und es folgt der Impulssatz für die ebene, inkompressible Grenzschicht

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(V^2\delta_2\right) + \delta_1 V \frac{dV}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

HINWEIS : δ_1 ist die Verdrängungsdicke und δ_2 die Impulsverlustdicke

Energiesatz

- Der Energiesatz folgt aus der Multiplikation der x-Komponente der Grenzschichtgleichungen mit u, der Integration von y = 0 bis y = h (h > δ(x)) und dem Ersetzen von v durch die Kontinuitätsgleichung

$$\rho\int_0^h\left(u^2\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial y}\left(\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)-uV\frac{dV}{dx}\right)dy=\eta\int_0^h u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy$$

- Das zweite Glied wird mit partieller Integration umgeformt

$$\int_0^h \left[u \frac{\partial u}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^h \left(V^2 - u^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

für das erste und dritte Glied ergibt sich

$$\int_0^h \left[u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - uV \frac{dV}{dx} \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^h u \frac{d}{dx} \left(u^2 - V^2 \right) dy$$

und die rechte Seite dieser Gleichung wird auch mit partieller Integration umgeformt

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d}{dx} \int_0^\infty u \left(u^2 - V^2 \right) dy = \eta \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy$$

HINWEIS : $h \to \infty$ (außerhalb der Grenzschicht verschwindet der Integrand)

- Erläuterungen zur Gleichung :

$$\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dx}\int_0^\infty u\left(u^2 - V^2\right)dy = \eta\int_0^\infty\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy$$

$\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ gibt die pro Volumen und Zeiteinheit durch Reibung in Wärme umgewandelte Energie an (Dissipation)

$\frac{\rho}{2}\left(u^2 - V^2\right)$ bedeutet den Verlust an mechanischer Energie, den die Reibungsschicht gegenüber der Potentialströmung erlitten hat

- Wird die Gleichung für die Energieverlustdicke verwendet, folgt

$$\frac{d}{dx}\left(V^3\delta_3\right) = 2\nu\int_0^\infty\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy$$

und mit der Beziehung

$$\tau = \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

ergibt sich der Energiesatz für die ebene inkompressible Grenzschicht

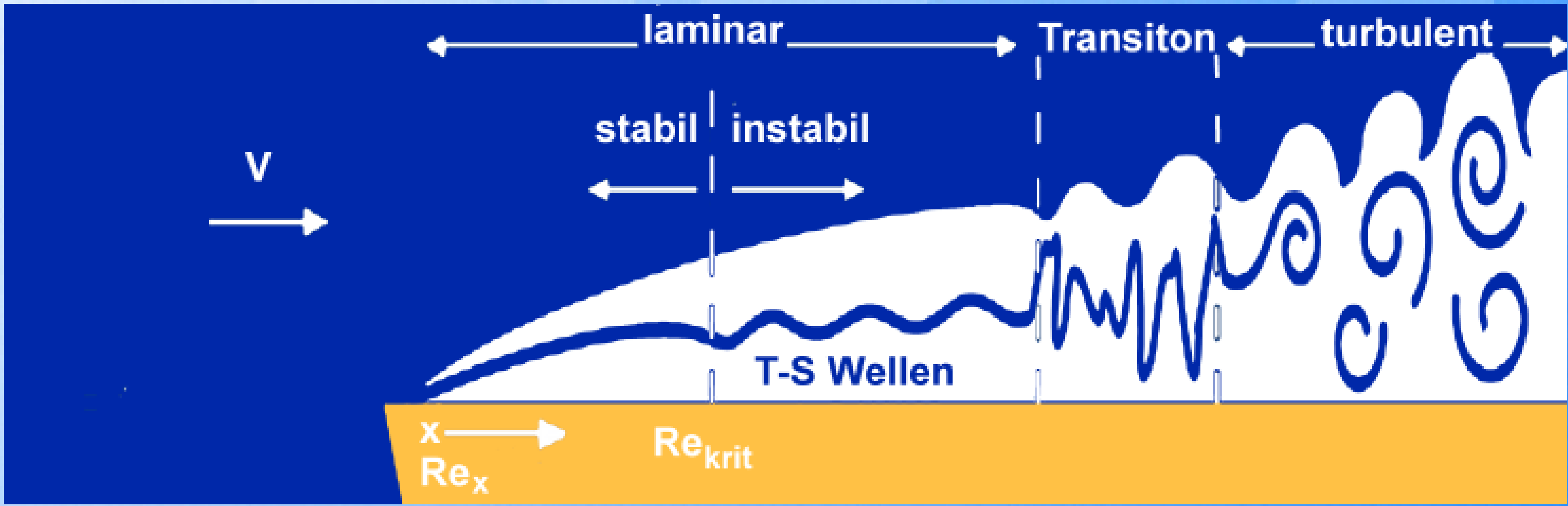
$$\frac{d}{dx}\left(V^3\delta_3\right) = \frac{2}{\rho}\int_0^\infty \tau\frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{2}{\rho}D$$

HINWEIS : D wird als Dissipationsintegral bezeichnet

Transition

- Bei kleinen Reynoldszahlen ist die Grenzschicht laminar und stabil

- Bei größeren Reynoldszahlen wird die Grenzschicht instabil (am Umschlagpunkt liegt die kritische Reynoldszahl Re_{krit} vor)



Grenzschicht mit Umschlag von laminar nach turbulent

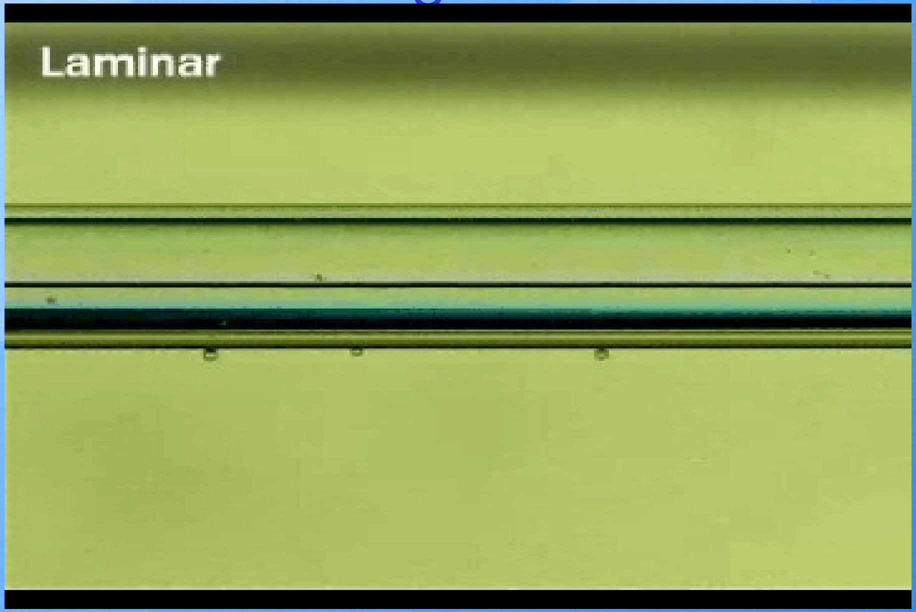
Transition

- Bei kleinen Reynoldszahlen ist die Grenzschicht laminar und stabil

- Bei größeren Reynoldszahlen wird die Grenzschicht instabil (am Umschlagpunkt liegt die kritische Reynoldszahl Re_{krit} vor)

- Die Instabilitäten entstehen aus kleinen Störungen in der Geschwindigkeit und im Druck

- Die Instabilitäten führen zur Transition von der laminaren Grenzschicht zur turbulenten Grenzschicht



Umschlag der Grenzschicht

Berechnung der Störentwicklungen (Methode der kleinen Schwingungen; Orr-Sommerfeld-Gleichung)

- Der Grundströmung **u** mit Druckfeld p werden kleine Störungen (Schwankungen) **u**‘ und p‘ überlagert

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \mathbf{u}'$$

$$p^* = p + p'$$

- Einsetzen der Gleichungen in die Navier-Stokes- und Kontinuitätsgleichung und subtrahieren der Gleichungen für die Grundströmung

$\rightarrow$ System von Differentialgleichungen für die Störgrößen

HINWEIS : Die Grundströmung (**u**,p) und das gestörte Feld (**u***,p*) müssen Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen sein und die Kontinuitätsgleichung erfüllen

Annahme :
- Störgrößen sind klein (Methode kleiner Schwingungen)

$\rightarrow$ Die Differentialgleichung für die Störgrößen werden linear

- Die Grundströmung hat nur eine Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung ($v = w = 0$)

- Die Störbewegung ist eben ($w' = 0$)

$\rightarrow$ Für die Störbewegung kann eine Stromfunktion ψ eingeführt werden

$\rightarrow$ Für die Störbewegung wird der Ansatz einer fortschreitenden Welle gemacht :

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y) e^{i(\alpha x - \beta t)}$$

- In der Gleichung

$$\psi(x,y,t) = \varphi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)}$$

haben die einzelnen Größen die folgende Bedeutung :

- φ ist die Amplitude der Störung

- α ist die (reelle) Wellenzahl
  (Zusammenhang mit der Wellenlänge λ : $\lambda = \dfrac{2\pi}{\alpha}$)

- β (komplexe Größe) setzt sich zusammen aus der reellen Kreisfrequenz ω der Schwingung und der komplexen Anfachungsrate β_i
  ($\beta_i > 0 \rightarrow$ Störung wird angefacht; $\beta_i < 0 \rightarrow$ Störung wird gedämpft)

- Es folgt die Orr-Sommerfeld-Gleichung als Ausgangspunkt für alle Stabilitätsuntersuchungen der laminaren Grenzschicht

$$(\tilde{u}-\tilde{c})\left(\tilde{\varphi}''-\alpha_\delta^2\tilde{\varphi}\right)-\tilde{u}''\tilde{\varphi}=-\frac{i}{\alpha_\delta \mathrm{Re}_\delta}\left(\tilde{\varphi}''''-2\alpha_\delta^2\tilde{\varphi}''+\alpha_\delta^4\tilde{\varphi}\right)$$

- c ist hierbei die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit $c=\frac{\beta}{\alpha}$

- Die Gleichung wurde mit V und δ dimensionslos gemacht

- Die Striche bedeuten die Differentiation nach $\eta=\frac{y}{\delta}$

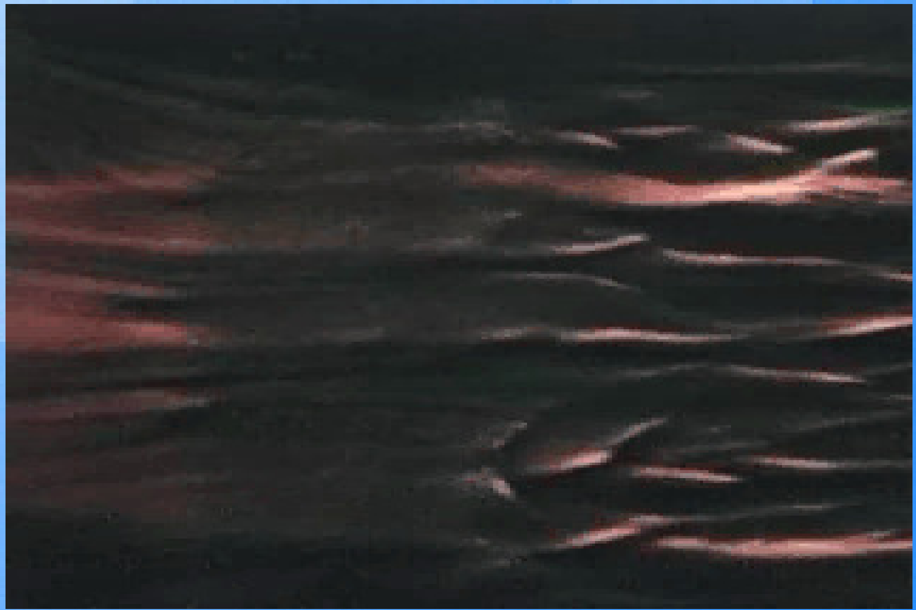
Historische Anmerkung :

- Die Orr-Sommerfeld-Gleichung wurde 1908 gefunden

- Erst um 1930 konnte eine Lösung angegeben werden

- Etwa 10 Jahre später gelang der erste experimentelle Nachweis der vorhergesagten linear anwachsenden Wellen

- Heute werden diese Wellen als Tollmien-Schlichting-Wellen bezeichnet



Tollmien-Schlichting-Wellen

Reibungsfreie Instabilität :

- Für große Reynoldszahlen wird die rechte Seite der Orr-Sommerfeld-Gleichung vernachlässigt

$$(\tilde{u} - \tilde{c})\left(\tilde{\varphi}'' - \alpha_\delta^2 \tilde{\varphi}\right) - \tilde{u}'' \tilde{\varphi} = 0$$

$\rightarrow$ Re_{krit} nicht mehr vorhersagbar

$\rightarrow$ Grundsätzliche Aussagen über die Stabilität der Grundströmung

$\rightarrow$ Wendepunktkriterium

Wendepunktkriterium :

- Existenz eines Wendepunktes in der Strömung ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten von Instabilitäten

$\rightarrow$ Strömungen ohne Wendepunkt sind stabil

- Gilt nur für reibungsfreie Instabilität

- Bei Berücksichtigung der viskosen Terme können auch Geschwindigkeitsprofile ohne Wendepunkt instabil werden (mit Wendepunkt werden Störungen schneller angefacht)

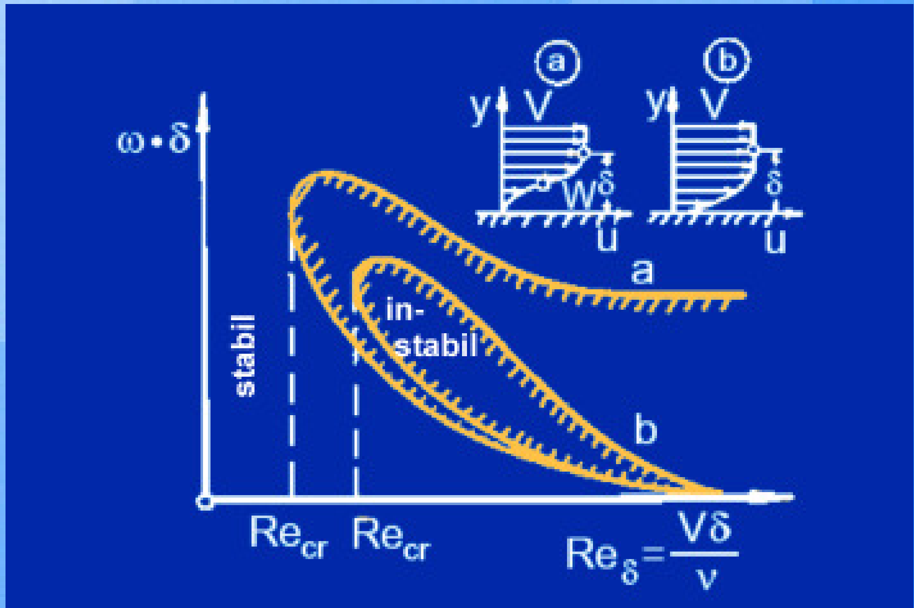
Viskose Instabilität :

- Unter Berücksichtigung der viskosen Terme der Orr-Sommerfeld-Gleichung lässt sich eine genaue Aussage treffen, ob Störungen stabil oder instabil sind

$\rightarrow Re_\delta, \alpha_\delta, \tilde{c}$ so bestimmen, dass sie mit den Randbedingungen die Orr-Sommerfeld-Gleichung erfüllen

- Das Vorzeichen von β_i entscheidet über Anfachung oder Dämpfung

- Fälle mit Indifferenz ($\beta_i = 0$) in Diagramm eintragen
  $\rightarrow$ Indifferenzkurven



Indifferenzkurven

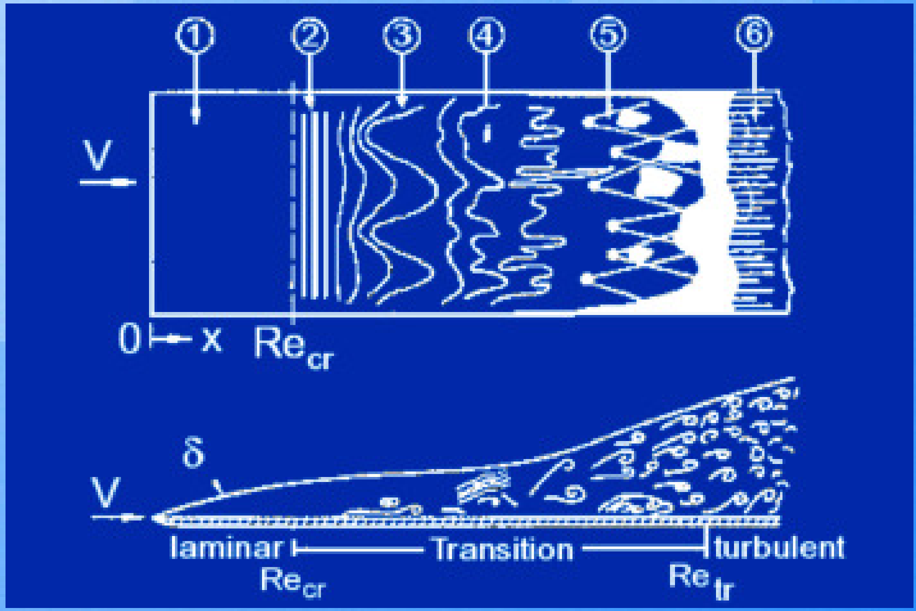
Der Umschlag zur Turbulenz

- Kritische Reynoldszahl sagt nichts über den eigentlichen Beginn der Turbulenz aus

- Turbulenzbeginn hängt vom Grad der äußeren Störungen (Tollmien-Schlichting Wellen) ab

- Umschlag der Plattengrenzschicht :

1. Stabile laminare Strömung
2. Instabile Tollmien-Schlichting-Wellen
3. Dreidimensionale Wirbel
4. Aufplatzen der Wirbel
5. Turbulenzflecken
6. Vollturbulente Strömung

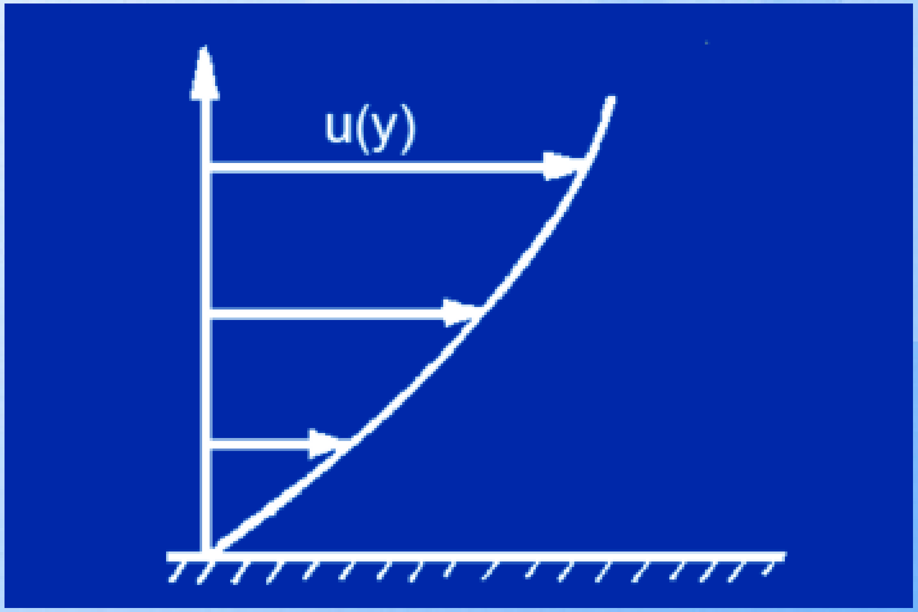


Umschlag zur Turbulenz

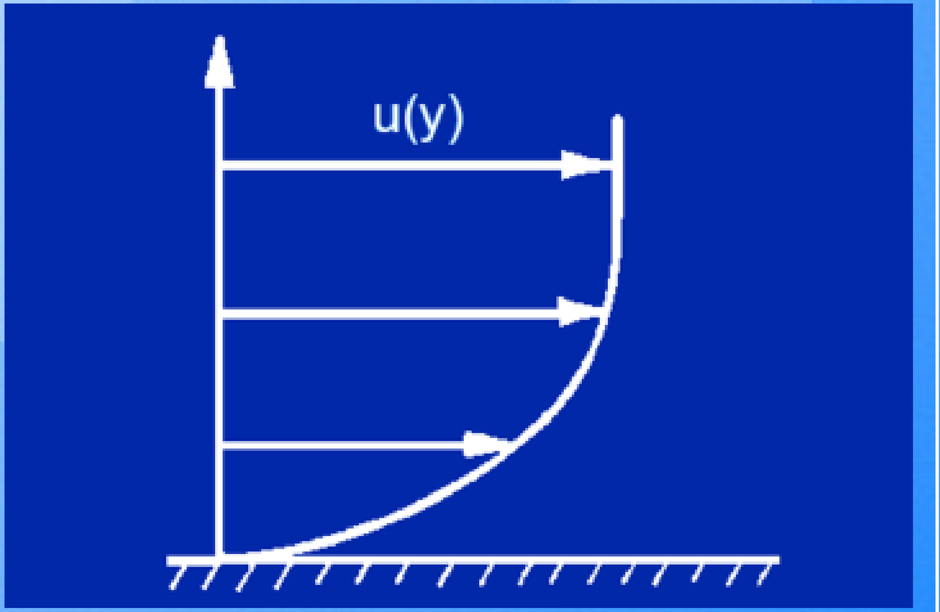
Geschwindigkeitsprofile

- Geschwindigkeitsprofile sind in turbulenter Grenzschicht völliger

- Die Völligkeit resultiert aus dem höheren Impulsaustausch in der turbulenten Grenzschicht



Laminares Grenzschichtprofil

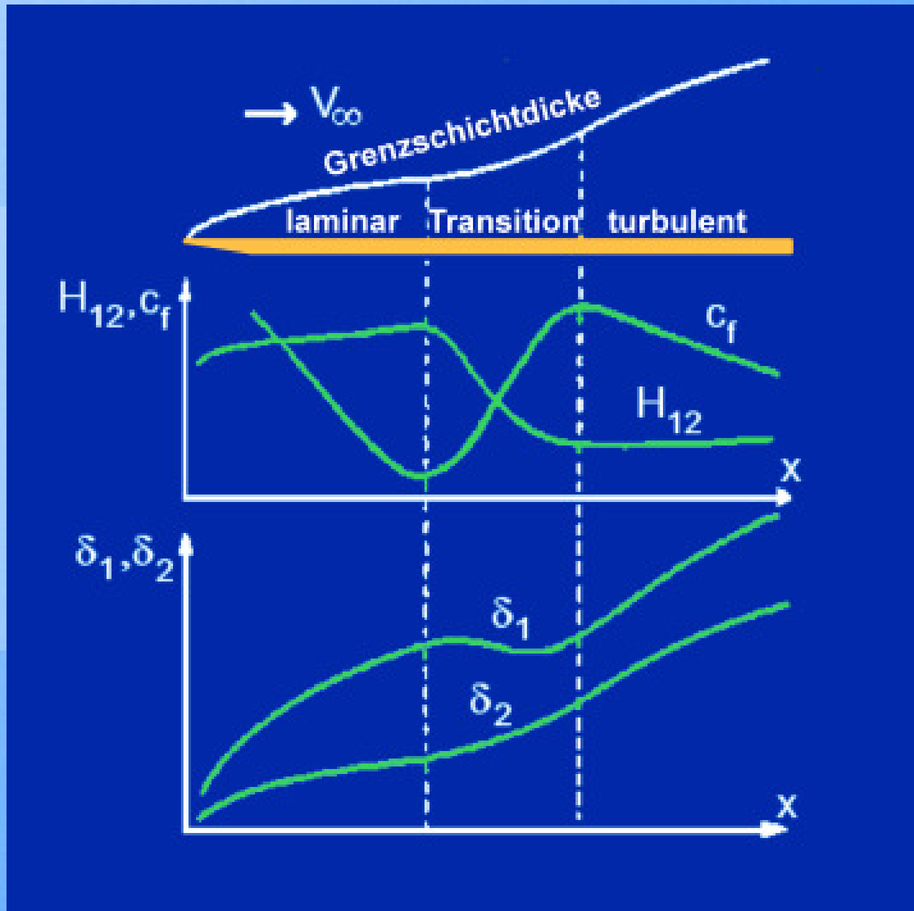


Turbulentes Grenzschichtprofil

Formparameter

-Die Völligkeit der Profile wird mit dem Formparameter H_{12} beschrieben

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$



Turbulentes Grenzschichtprofil

5. Vorlesung Aerodynamik I

Formparameter

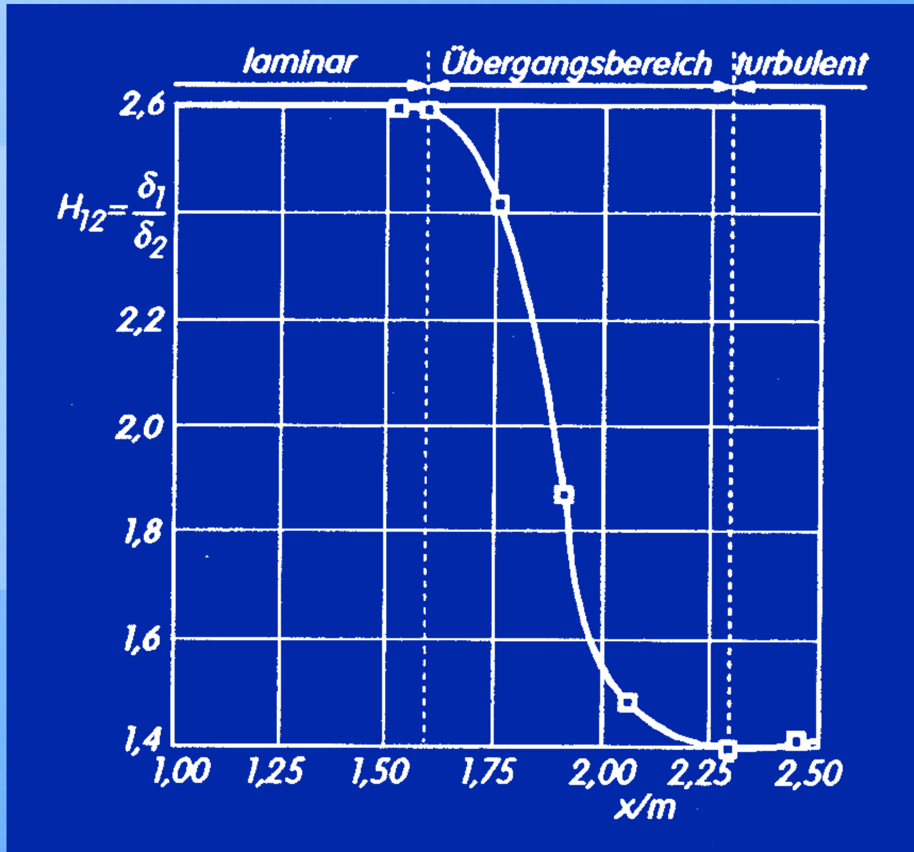
- Für ein Blasius-Geschwindigkeitsprofil (ebene Platte ohne Druckgradient, laminare Grenzschicht) ist der Formparameter H_{12} konstant

$$H_{12} = 2{,}59$$

- Im Bereich der Transition vermindert sich der Wert des Formparameters

-Im turbulenten Bereich der ebenen Platte gilt

$$H_{12} \approx 1{,}4$$



Formfaktor entlang einer ebenen Platte

Formparameter

- Neben H_{12} wird auch der Formparameter H_{32} verwendet

$$H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta_2}$$

- Formparameter werden zum Beispiel für empirische Transitions- und Ablösekriterien verwendet

Transitionskriterium nach *Eppler*

$$\ln\left(\mathrm{Re}_{\delta_2}\right) \geq 18.4 \cdot H_{32} - 21.74 - 0.36 \cdot r + 0.125 \cdot \left(H_{32} - 1.573\right)^2$$

e^n-Transitionskriterium nach *Drela* (XFOIL)

$$\mathrm{Re}_{\delta_2} > \mathrm{Re}_{\delta_2,crit}$$

$$\log_{10}\left(\mathrm{Re}_{\delta_2,crit}\right) = 0.7 \cdot \tanh\left(\frac{14}{H_{12}-1} - 9.24\right) + 2.492 \cdot \left(\frac{1}{H_{12}-1}\right)^{0.43} + 0.62$$

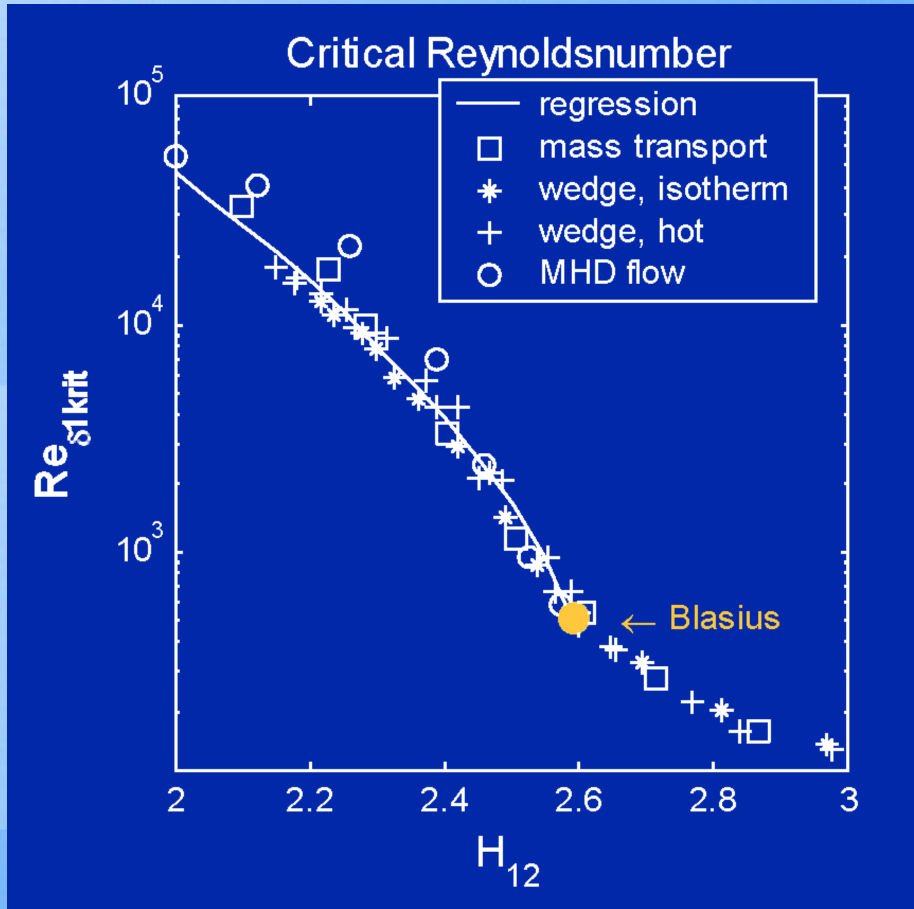
Formparameter

- Kritische Reynoldszahl ist abhängig vom Formfaktor H_{12}

- Kritische Reynoldszahl ist weitgehend unabhängig von der Ursache der Änderung des Formfaktors

Formparameter lässt sich unter anderem ändern durch:

- Druckgradienten
- Grenzschichtbeeinflussung
- Transition



Kritische Reynoldszahl als Funktion des Formfaktors H_{12}

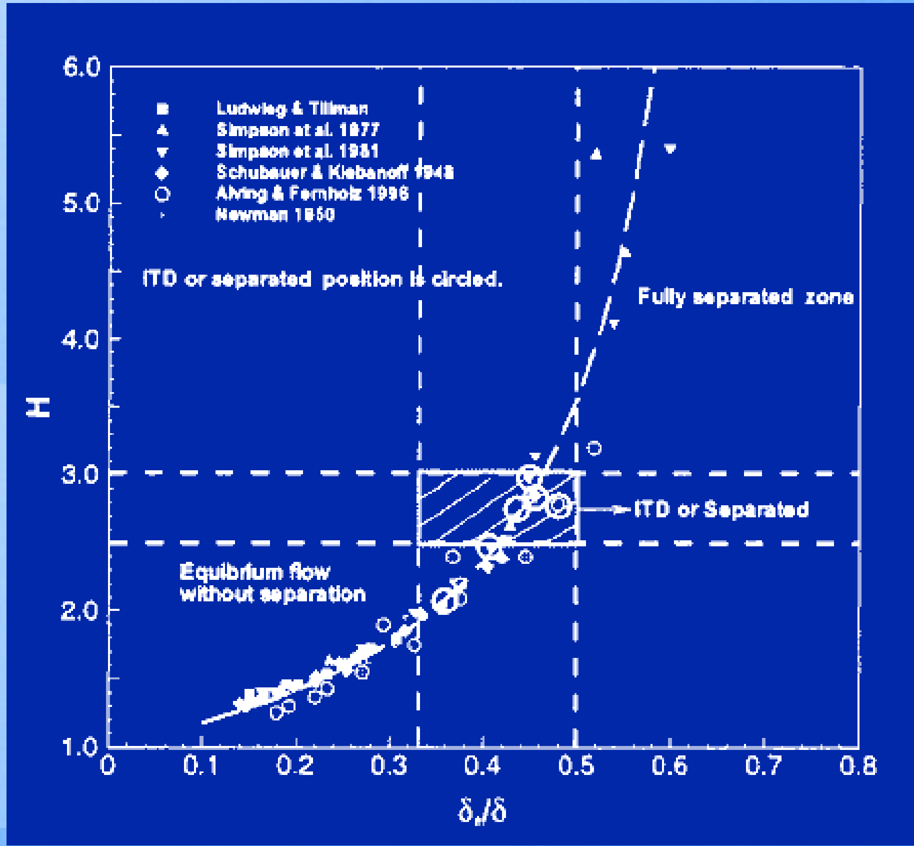
Formparameter

- Ablösekriterium für laminare Grenzschicht. Ablösungen wenn

$$H_{32} < 1{,}51509$$

- Ablösekriterium für turbulente Grenzschicht. Ablösungen wenn

$$H_{32} < 1{,}46$$



Formfaktor H_{12} als Funktion von δ_1/δ zur Bestimmung abgelöster Strömung

Turbulenzgrad

- Ein Maß für die Störungen in der Außenströmung ist der Turbulenzgrad

$$T_u = \frac{1}{U_\infty}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)}$$

- In Windkanälen liegt annähernd isotrope Turbulenz vor

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} \rightarrow T_u = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_\infty}$$

- Aus Experimenten folgt für steigenden Turbulenzgrad

$$Re_{tr} \rightarrow Re_{cr}$$

HINWEIS : u‘, v‘ und w‘ sind die turbulenten Schwankungsbewegungen

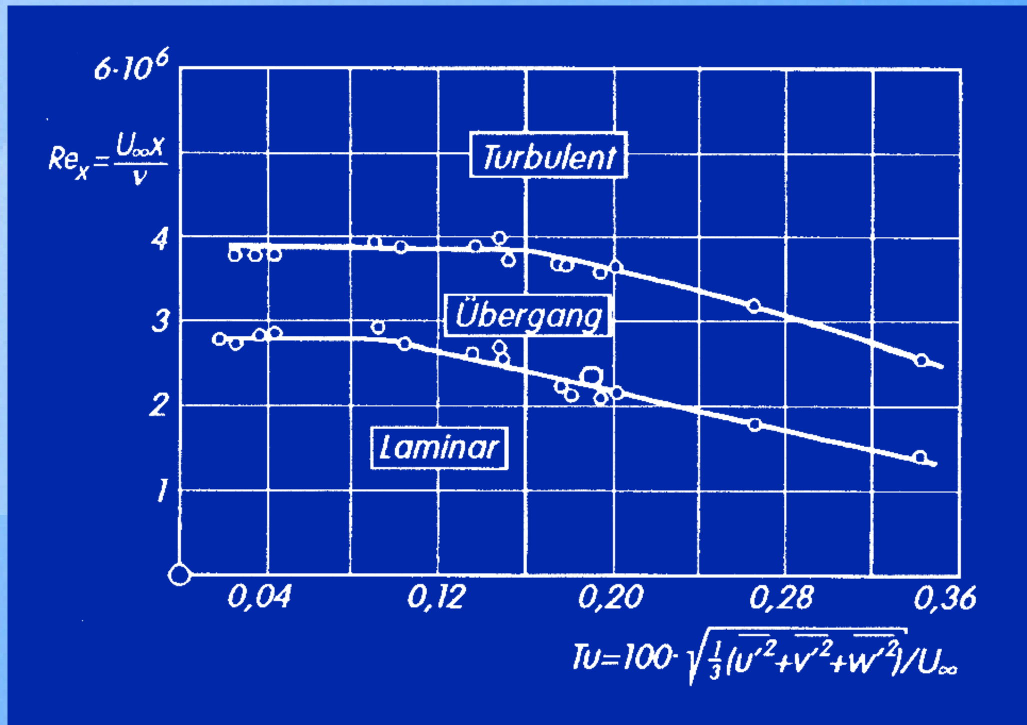
Turbulenzgrad

- Turbulente Schwankungen der Außenströmung dringen in die Grenzschicht ein → „**Rezeptivität**"

- Grenzschichtinstabilitäten werden angeregt

- Transition tritt früher ein

- Transitionsmechanismus ist abhängig vom Turbulenzgrad



Verminderung der Transitions-Reynoldszahl an einer ebenen Platte

Einfluss der Rauhigkeit

- Die Oberflächenrauhigkeit hat einen erheblichen Einfluss auf die Transition

- Wegen der Vielzahl an Rauhigkeiten sind Verallgemeinerungen jedoch schwer möglich

- Prinzipiell führen Rauhigkeiten zu Störungen und beschleunigen den Umschlag

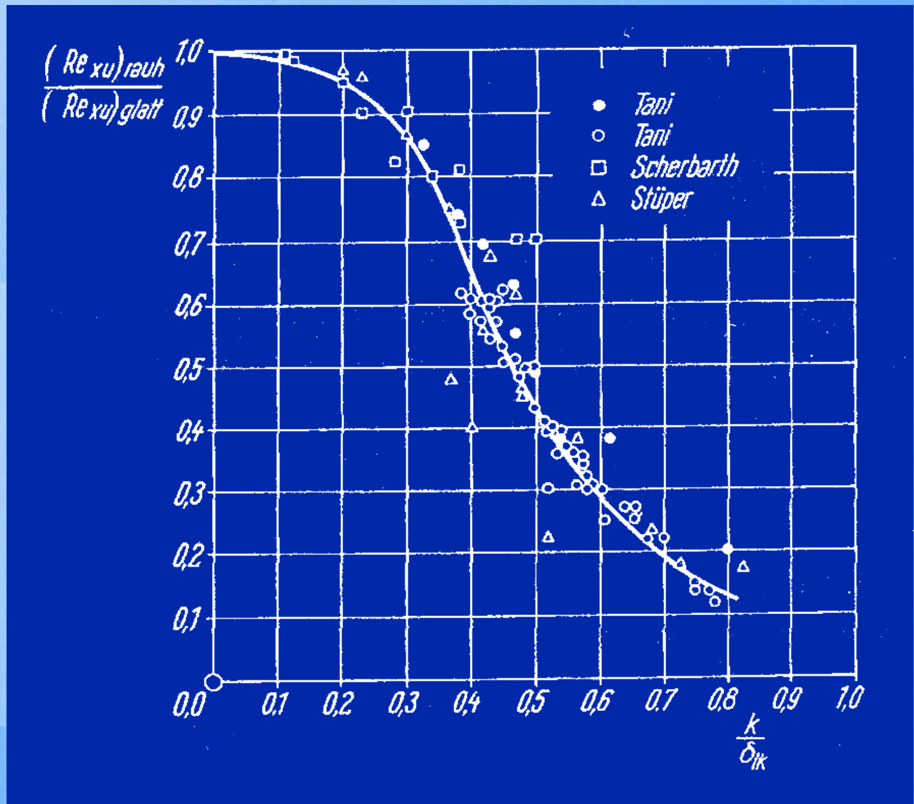
- Die Rauhigkeit k muss einen kritischen Wert übersteigen um Einfluss auf die Transition zu nehmen

- Mit zunehmender Rauhigkeit wandert der Umschlagpunkt nach vorne (bis maximal an das Rauhigkeitselement heran)

Einfluss der Rauhigkeit

- Das Verhältnis der Rauhigkeitshöhe *k* zur lokalen Grenzschichtdicke δ_{lk} beeinflusst die kritische Reynolds-Zahl und damit die Transitionslage

- Bei sofortiger Transition an der Rauhigkeit spricht man von Bypass-Transition (Transitionsmechanismus mit anwachsenden Störungen wird umgangen)



Verhältnis der kritischen Reynolds-Zahl an einer ebenen Platte mit einer Einzelrauhigkeit zu der an einer glatten Platte

e^n-Methode

- Um alle Einflüsse auf die Transition gemeinsam zu untersuchen, wird die e^n-Methode verwendet

- Bei der e^n-Methode wird angenommen, dass eine instabile Welle, die eine Strecke $\Delta x = u\Delta t$ wandert eine Verstärkung $e^{(\beta_i \Delta t)}$ erfährt

- Das Verhältnis der Amplitude an der Stelle x zur Stelle x_{cr} ergibt sich zu

$$\frac{A(x)}{A_0(x_{cr})} = e^{\left(\int_{t_{krit}}^{t} \beta_i(x)\,dt(x)\right)}$$

- Aus Experimenten folgt das Amplitudenverhältnis im Umschlagpunkt zu

$$\frac{A(x_{tr})}{A_0(x_{cr})} = e^n$$

- n liegt zwischen neun und zehn, hängt jedoch stark von der Strömung ab

- Die e^n-Methode geht von linear anwachsenden Störungen aus

- Nicht berücksichtigt werden stark nicht lineares und dreidimensionales Verhalten

Turbulente Grenzschichten

- In turbulenten Grenzschichten gilt nicht mehr der Zusammenhang

$$\frac{\delta}{l} = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$$

sondern

$$\frac{\delta}{l} = O\left(\frac{1}{\sqrt[5]{Re}}\right)$$

bzw. als exakte Lösung

$$\frac{\delta}{l} = 0{,}37\left(\frac{1}{\sqrt[5]{Re}}\right)$$

HINWEIS : Trotzdem gilt natürlich weiterhin $\delta/l \ll 1$ für $Re \rightarrow \infty$

- Ähnlich der Prandtlschen Grenzschichtgleichungen für die laminare Grenzschicht gilt die Vereinfachung der Reynoldschen Gleichung

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\bar{p}}{dx} + \nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u'v'}\right)$$

Wandgesetz der turbulenten Grenzschicht

- In der Nähe der Wand wird die Strömung nicht von den äußeren Bereichen beeinflusst

$$\bar{u} = f\left(y, \tau_w, \eta, \rho\right)$$

- Mit Hilfe der Dimensionsanalyse folgt

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} = f\left(\frac{y\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}{\frac{\eta}{\rho}}\right)$$

- Mit der Schubspannungsgeschwindigkeit

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

werden die Größen

$$u^+ = \frac{\overline{u}}{u_\tau} \qquad y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

definiert

und es folgt das universelle Wandgesetz nach Prandtl

$$u^+ = f\left(y^+\right)$$

Viskose Unterschicht

- In der Nähe der Wand gilt die Haftbedingung

$$u, v \approx 0$$

- Außerdem gilt

$$u' = 0 \qquad v' = 0$$

- Daraus ergibt sich nach zweimaliger Integration der Reynoldsschen Gleichung

$$\bar{u} = \frac{\tau_w}{\nu\rho} y + \frac{1}{2\rho\upsilon} \frac{d\bar{p}}{dx} y^2$$

- Aus der Betrachtung der Gleichung

$$\bar{u} = \frac{\tau_w}{\nu\rho} y + \frac{1}{2\rho\upsilon} \frac{d\bar{p}}{dx} y^2$$

folgt, dass in unmittelbarer Wandnähe die Geschwindigkeit proportional zum Wandabstand ist (y^2 spielt hier keine Rolle)

- Es gilt daher

$$u^+ = y^+$$

- Der Bereich in dem diese Gleichung gilt wird viskose Unterschicht genannt

Logarithmisches Wandgesetz

- Mit zunehmender Entfernung von der Wand werden die turbulenten Schwankung größer

  $\rightarrow$ Der Beitrag der Viskosität zum Impulsaustausch tritt in den Hintergrund

- Differenzieren des universellen Wandgesetzes nach y liefert

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = u_\tau \frac{\partial f}{\partial y}\frac{u_\tau}{\nu} = \frac{u_\tau}{y}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{y u_\tau}{\nu}$$

mit

$$f^*\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{y u_\tau}{\nu}$$

- Da die Viskosität im betrachteten Bereich keine Rolle spielt muss die Funktion f* eine Konstante sein und es gilt

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \text{const.} \cdot \frac{u_\tau}{y}$$

- Durch Integration und Übergang zu den Wandgrößen folgt das logarithmische Wandgesetz

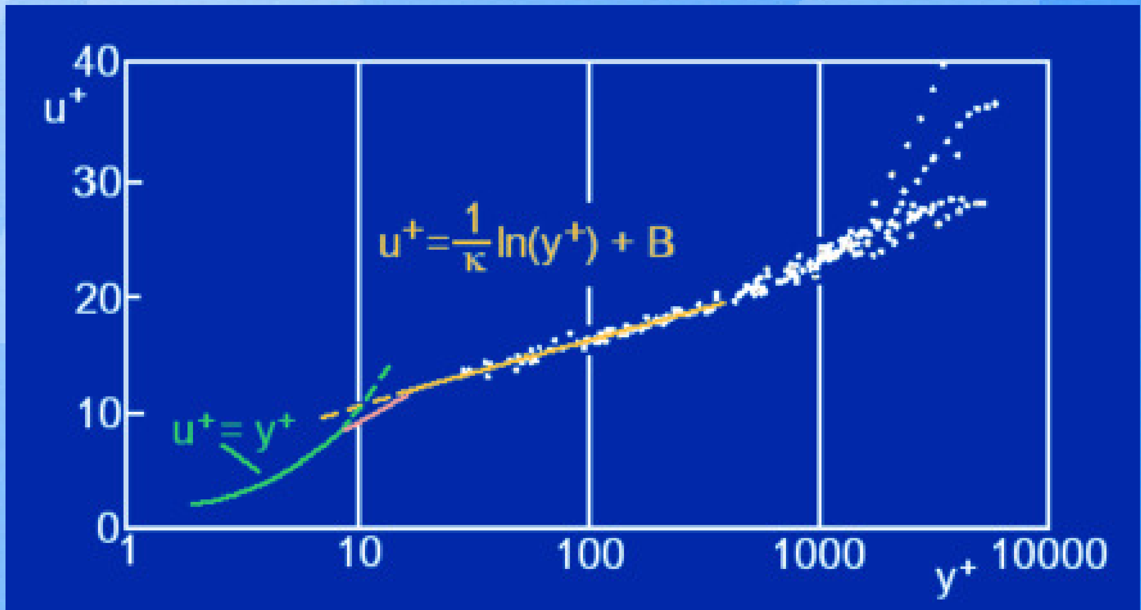
$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln\left(y^+\right) + B$$

- Die Konstante κ wird Karman-Konstante genannt und beträgt etwa 0,4

- Die Konstante B hat etwa den Wert 5

- Der Gültigkeitsbereich des logarithmischen Wandgesetzes beginnt bei $y^+ \approx 30$

- In Bereichen in denen der Druckgradient zu groß wird verliert das logarithmische Wandgesetz seine Gültigkeit

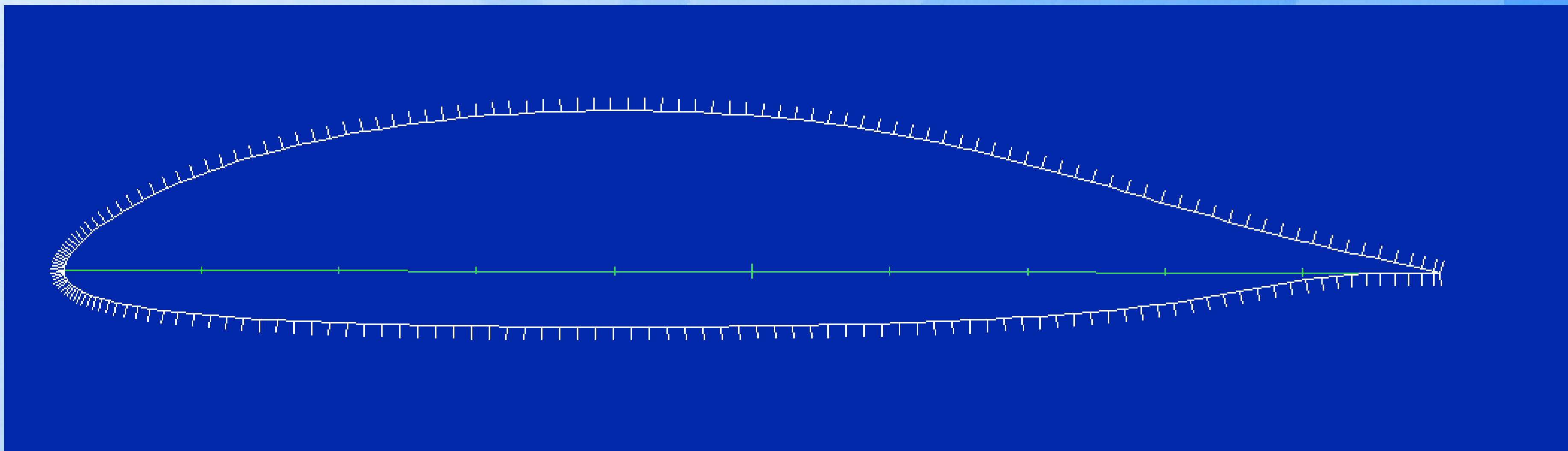


Universeller Geschwindigkeitsverlauf in der turbulenten Grenzschicht (Punkte = Messwerte)

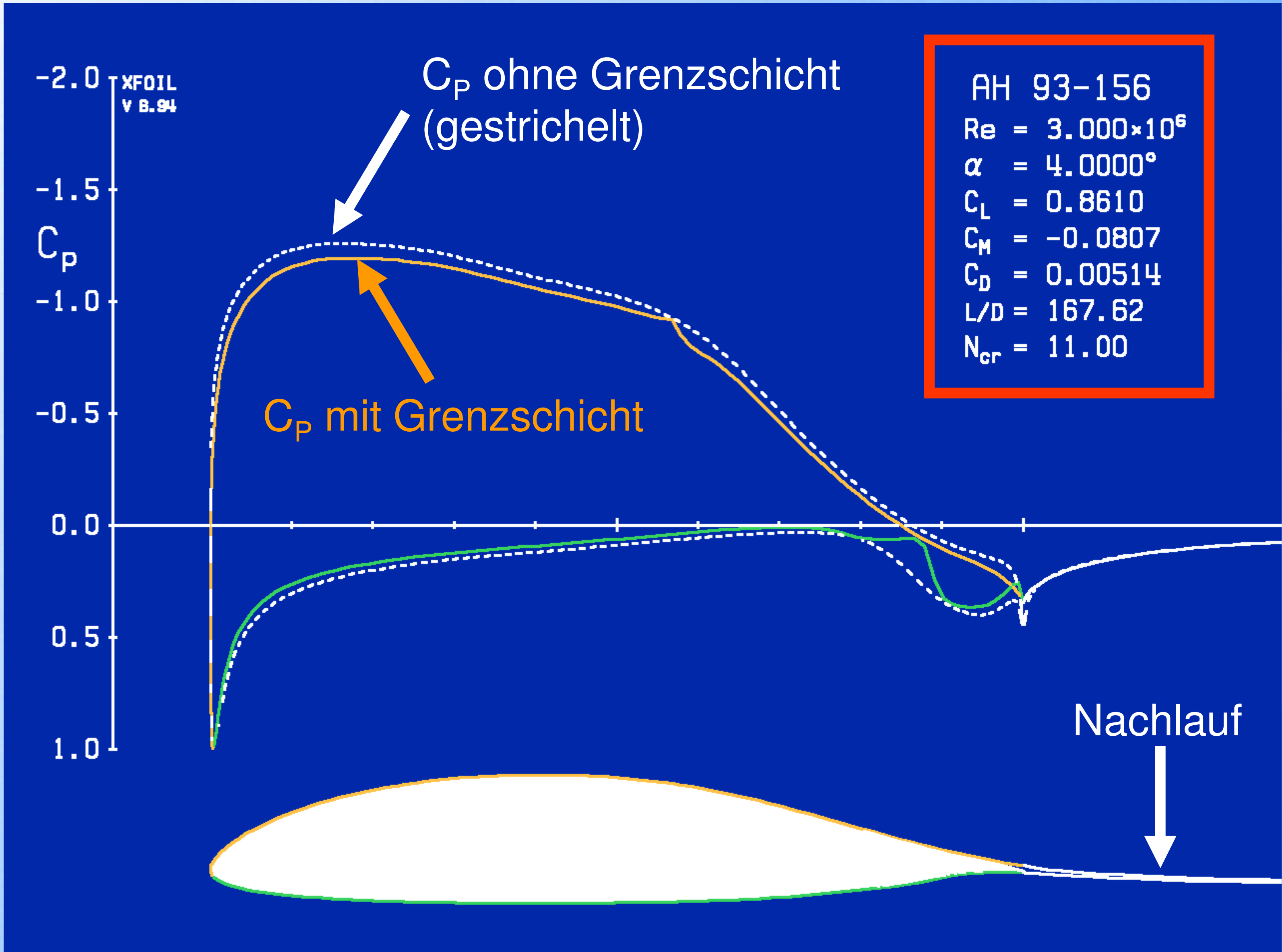
Beispiel: Grenzschichtberechnung für ein modernes Laminarprofil mit dem 2D-Panel-Programm „*XFOIL*“

XFOIL im Internet unter GNU General Public License:

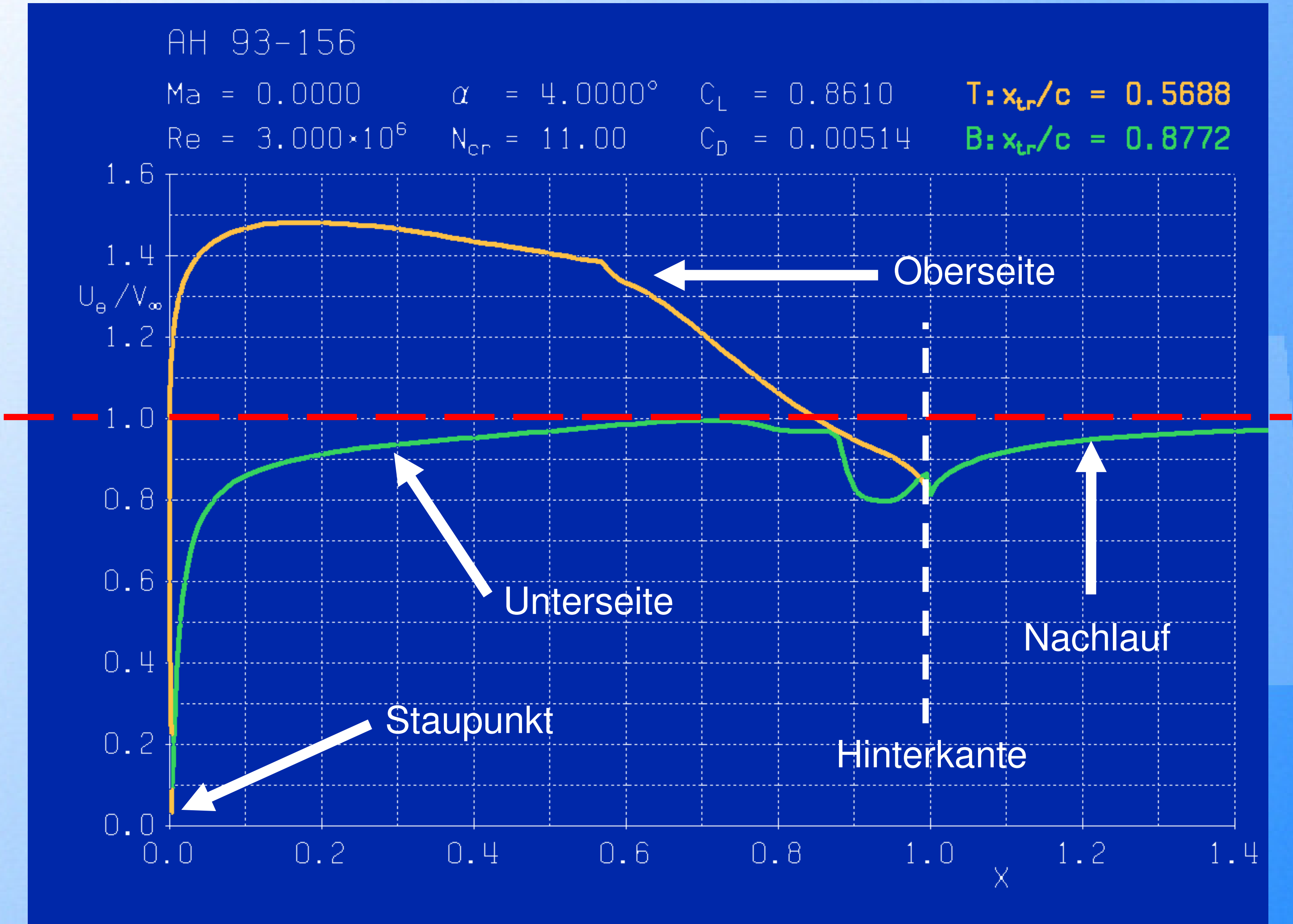
http://web.mit.edu/drela/Public/web/xfoil/



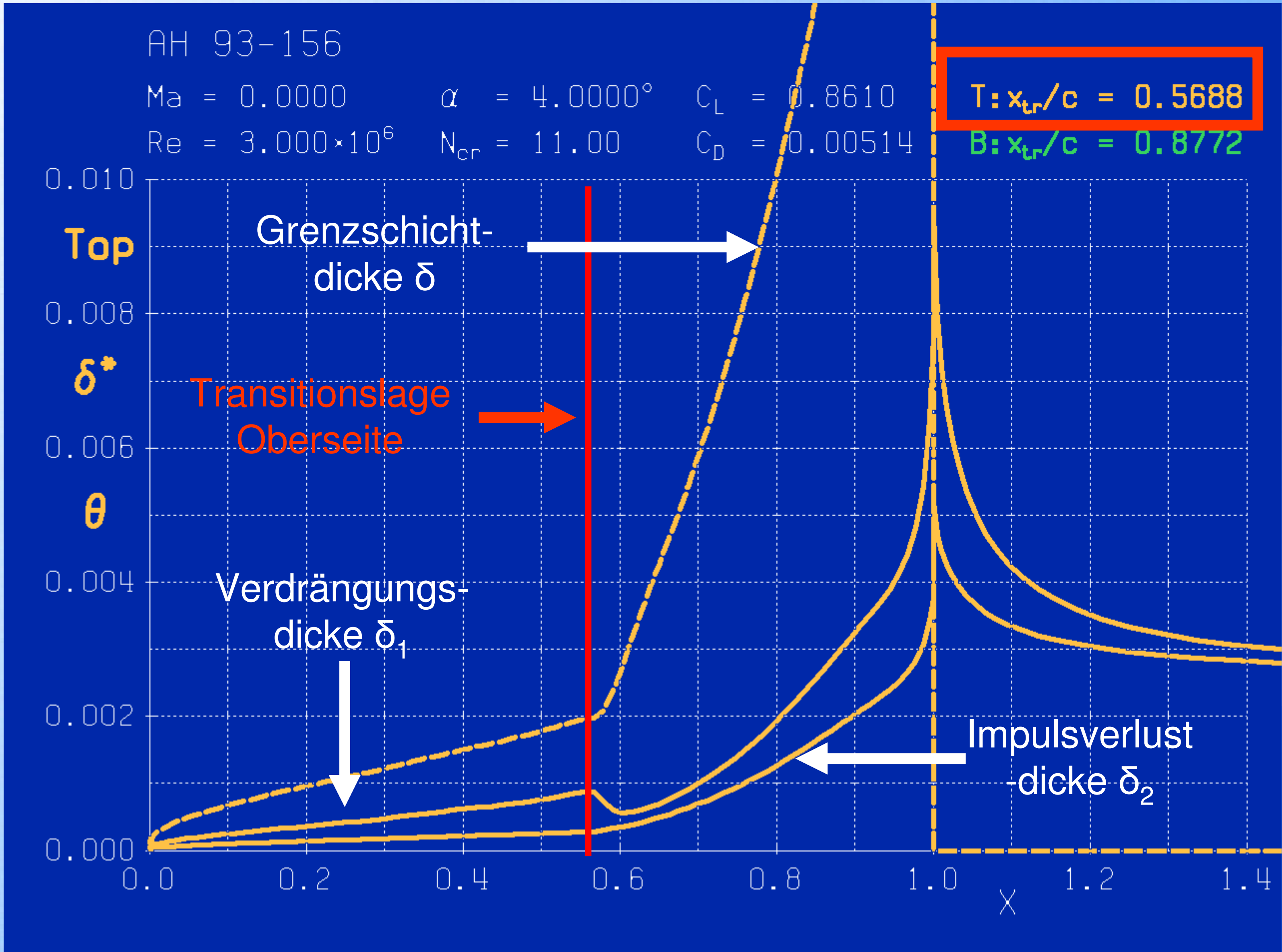
Laminarprofil Althaus AH 93-156 in XFOIL mit 200 Panelen, im Nasenbereich erhöhte Paneldichte



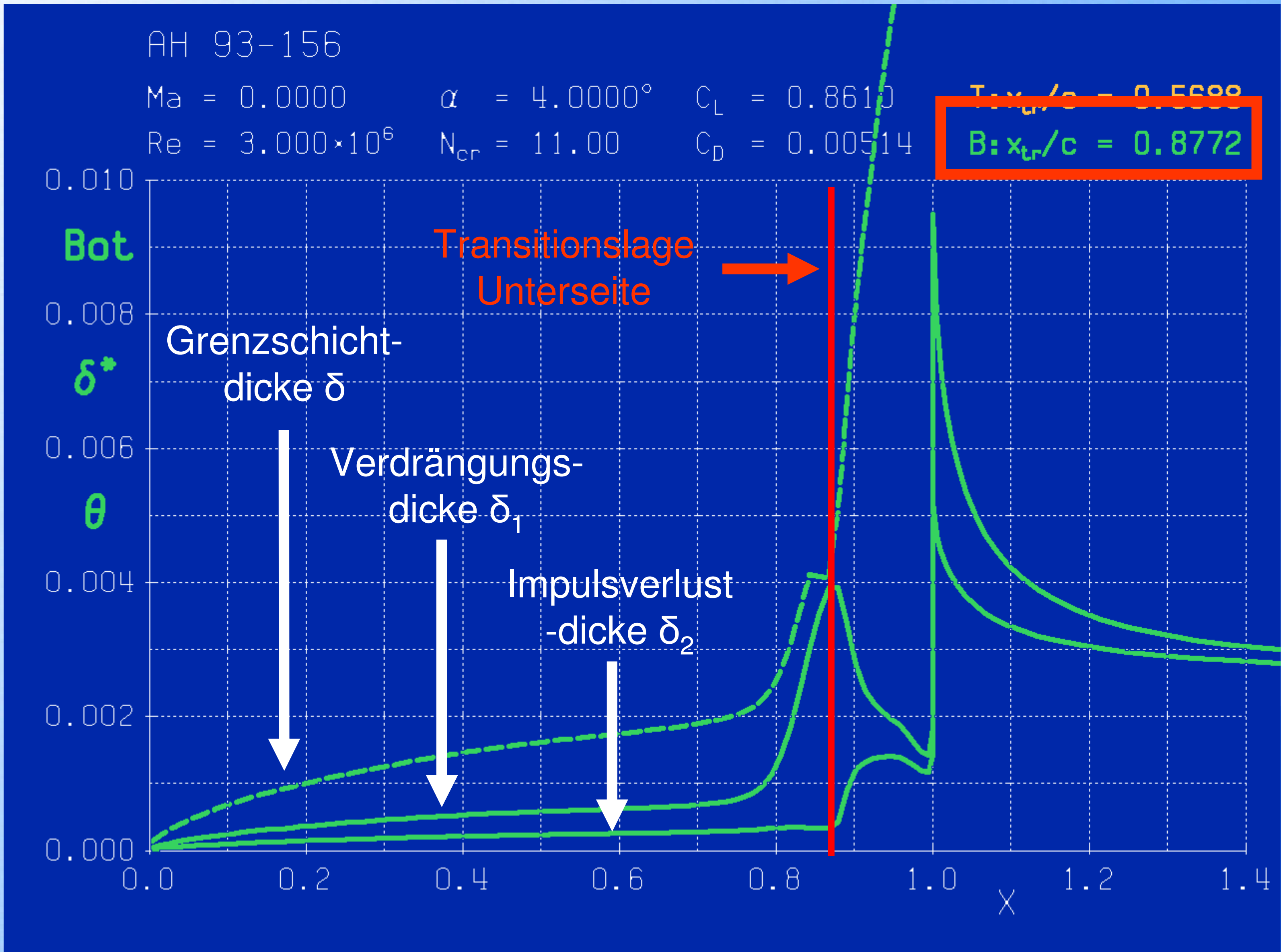
Cp-Verlauf mit und ohne Berücksichtigung der Grenzschicht



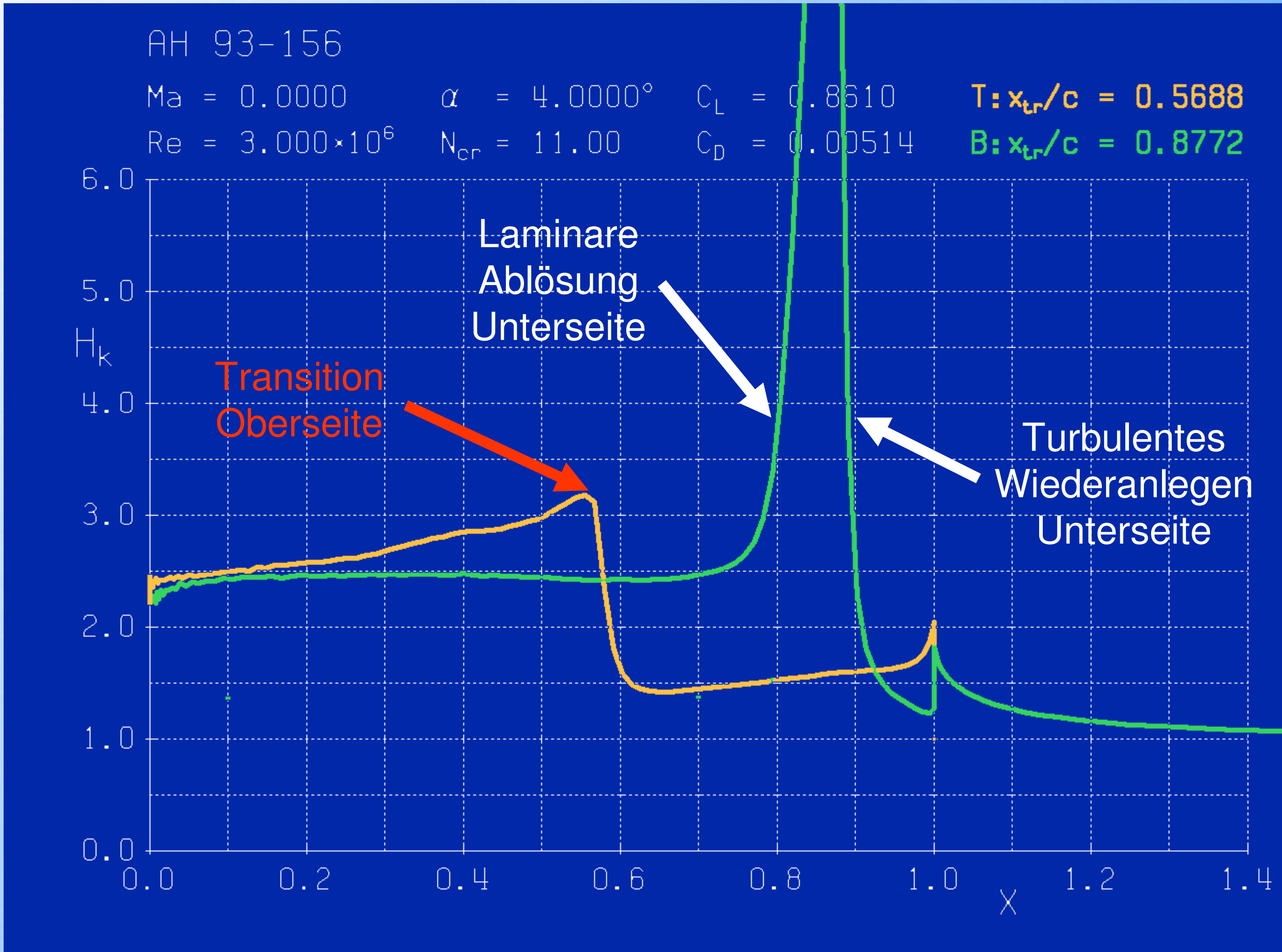
Geschwindigkeit am Rand der Grenzschicht



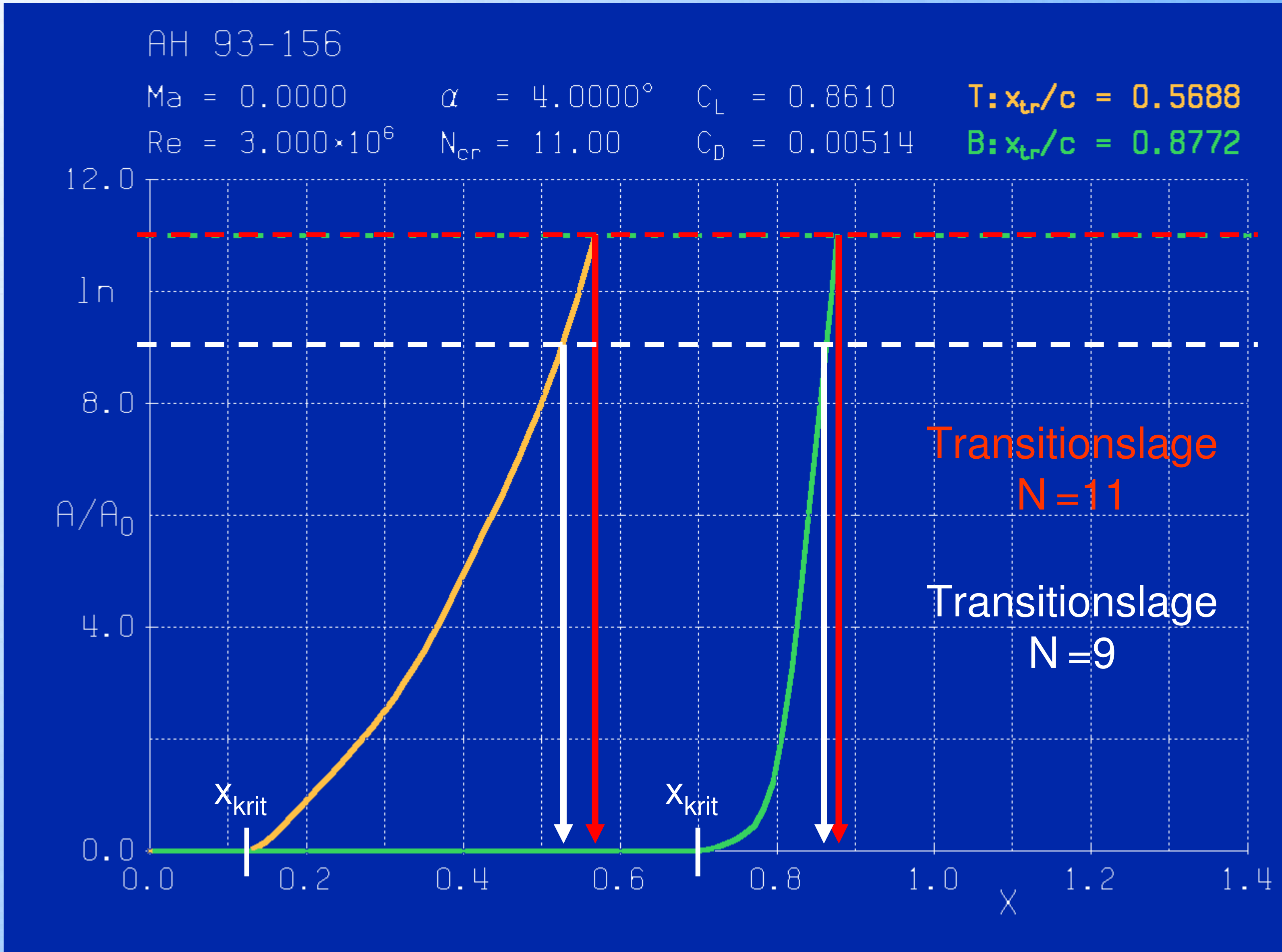
Grenzschichtdicke auf der Profiloberseite



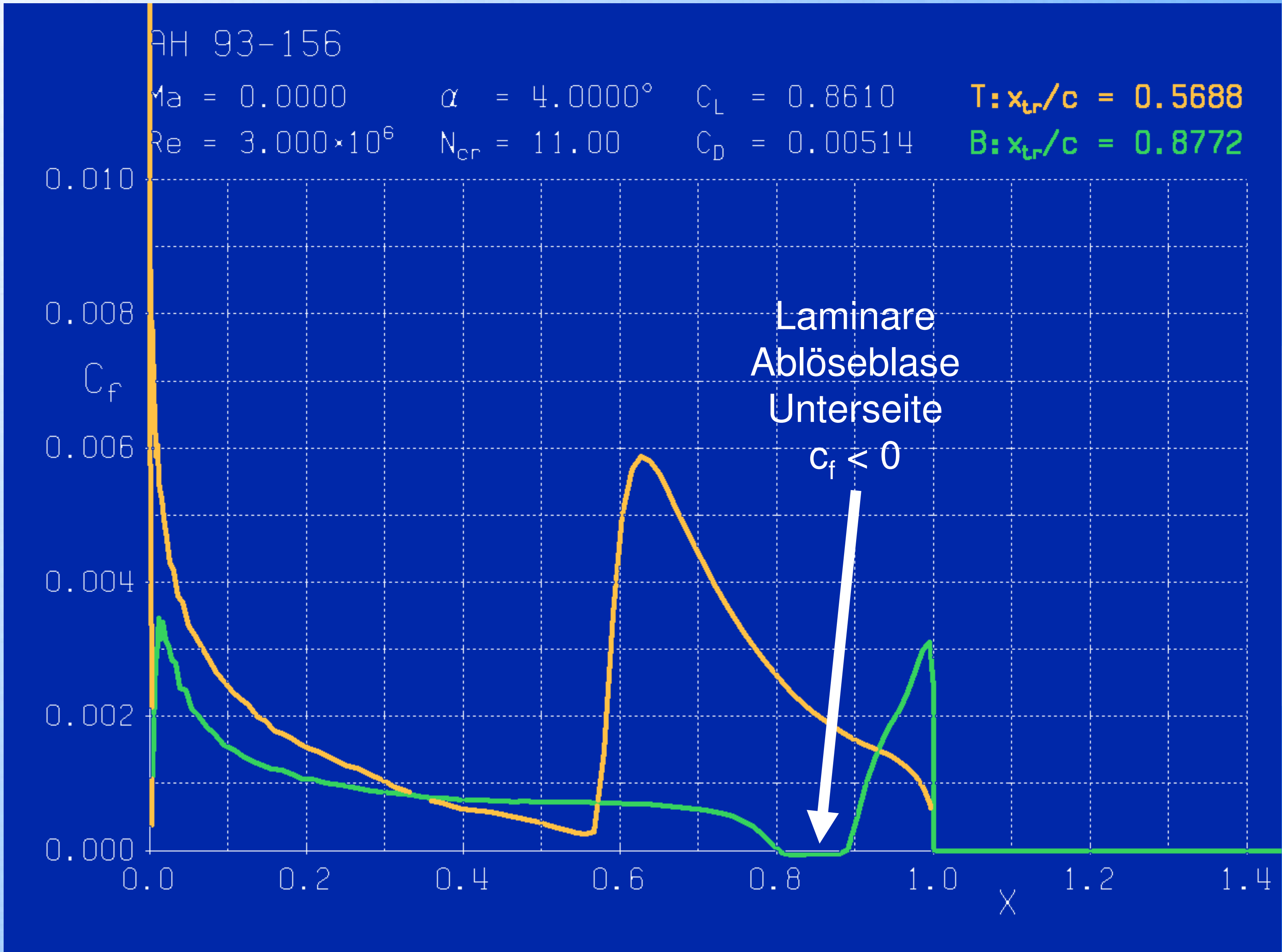
Grenzschichtdicke auf der Profilunterseite



Formfaktoren für Ober- und Unterseite des Profils



Bestimmung der Transitionslage mit der e^n-Methode



Schubspannungsbeiwert

Zusammenfassung :

- In Wandnähe kann Reibung nicht vernachlässigt werden → Grenzschicht
- Prandtlsche Grenzschichtgleichungen beschreiben die Strömung innerhalb der Grenzschicht
- In Gebieten mit positivem Druckgradienten kann es zu Ablösungen kommen
- Grenzschichten können laminar oder turbulent sein
- Der Übergang von laminar nach turbulent wird Transition genannt
- Die Transition wird durch Instabilitäten der laminaren Grenzschicht ausgelöst (Tollmien-Schlichting-Wellen)
- In der turbulenten Grenzschicht ist das Geschwindigkeitsprofil völliger als in der laminaren Grenzschicht